Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение ВПО**

**Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники (ТУСУР)**

**Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)**

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**Методический комплекс
для организации самостоятельной работы студентов
инженерных специальностей**

РАЗРАБОТЧИКИ
Ст. преподаватель кафедры АОИ
_______________З.А. Смыслова
Математик 1 категории кафедры
АОИ __________Л.И. Синчинова

2015

## СОДЕРЖАНИЕ

# 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

## 1.1. Множества и операции над ними

### *1.1.1. Понятие множества*

Теория множеств опирается на три первичных понятия:

1) множество;

2) элемент;

3) принадлежность.

Строгого определения этим понятиям не дается, описывается только их применение. Для этих понятий используются обозначения: “$a \in A$”- элемент $a$ принадлежит множеству $A$; “$c \notin A$”элемент $c$ не принадлежит множеству $A$.

Говоря о некотором множестве, мы требуем его:

1) целостности, т.е. возможности рассматривать его как отдельный объект;

2) различимости его элементов;

3) неупорядоченности элементов.

Поэтому записи $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ определяют одно и то же множество.

### *1.1.2. Способы задания множеств*

Множество можно задать, перечислив все его элементы: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{-1,3,6,8\}$. Порядок записи элементов множества произволен. Часто задают множество, указав его характеристическое свойство, которое для каждого элемента позволяет выяснить, принадлежит он множеству или нет.

Например,

$B=\{x|\ x$ – целый корень уравнения $2x^3-x^2+1=0\}$,

$\mathrm{C}=\{\mathrm{x}|\ -1\le \mathrm{x}\le 7, \mathrm{x}$ – целое $\}$.

В дальнейшем для известных числовых множеств будут использоваться обозначения:

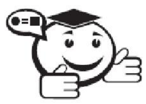
**N** = { 1,2,3,…} – множество натуральных чисел;

$\mathbf{Z} = \{ \ldots, -2,-1,0,1,2,\ldots\}$ – множество целых чисел;

**Q** – множество рациональных чисел;

**R** – множество действительных чисел.

### *1.1.3. Основные определения*



***Пустым*** множеством называется множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента, т.е. для любого элемента $x$ выполняется $x \notin \varnothing$.

***Универсальным*** называется множество **U** всех элементов, рассматриваемых в данной задаче.

*Пример.* Пусть **U** = **Z** и требуется найти все решения уравнения $x^2 = 2$. Множество **M** решений этой задачи есть пустое множество: **M** = $\varnothing$.

Пусть теперь **U** = **R**. Тогда множество **M** решений уравнения $x^2 = 2$ не пусто: **M** = $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Будем говорить, что множество $A$ ***включается*** во множество $B$ $(A \subseteq B)$, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$ ( говорят также, что $A$ является подмножеством множества $B$). Из определения включения следуют свойства:

1) $A \subseteq A$ для любого множества $A$;
2) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) $\varnothing \subseteq A$ для любого множества $A$;
4) $A \subseteq \mathbf{U}$ для любого множества $A$.

Подмножество $A \subseteq B$ называется собственным подмножеством множества $B$ ($A \subset B$ - строгое включение), если $A$ не пусто и не совпадает с $B$. Например, имеют место строгие включения: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Определим понятие ***равенства*** множеств: $A=B$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$ и каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B, \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Свойства равенства множеств:

1) для любого $A$ справедливо $A=A$;

2) если $A=B$, то и $B=A$;

3) если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$.

### *1.1.4. Диаграммы Эйлера – Венна*

Эти диаграммы применяются для наглядного изображения множеств и их взаимного расположения.

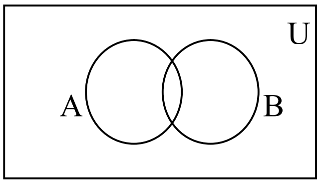



Рис. 1.1 Диаграмма Эйлера-Венна

Универсальное множество **U** изображается в виде прямоугольника, а произвольные множества – подмножества универсального – в виде кругов (рис. 1.1).

При этом возможны следующие случаи взаимного расположения двух множеств $A$ и $B$:

1) одно из множеств строго включается в другое ($A \subset B$ или $B \subset A$);

2) множества равны;

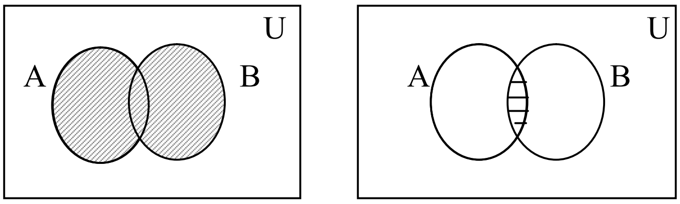
3) множества не имеют общих элементов;

4) множества находятся в общем положении, т.е. не подходит ни один из вышеперечисленных случаев, и множества расположены как на рис. 1.1.

### *1.1.5. Операции над множествами*

***Объединением*** множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ или $B$ (рис. 1.2, *а*).

*Пример*. Если $A=\{0,1,2\}, B=\{-1,2,3\}$, то $A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$.




*а)* *б)*

Рис. 1.2. Операции над множествами:

а) объединение множеств;

б) пересечение множеств

***Пересечением*** множеств *A* и *B* называется множество $A\cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству *A*, и множеству *B* (рис. 1.2, *б*).

*Пример*. Если $A=\{0,1,2\}, B=\{-1,2,3\}$, то $A\cap B=\{2\}$.

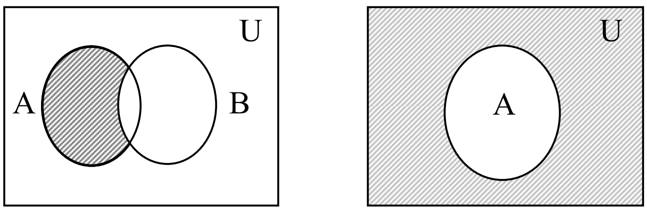
***Разностью*** множеств *A* и *B* называется множество $A\setminus B$ тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A* и не принадлежат множеству *B* (рис. 1.3, *а*).

*Пример*. $A\setminus B=\{0,1,2\}\setminus\{-1,2,3\}=\{0,1\}$;

$B\setminus A=\{-1,2,3\}\setminus\{0,1,2\}=\{-1,3\}$.

***Дополнением*** множества *A* до универсального **U** называется множество $\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A$ (рис. 1.3, *б*).

*Пример*. Если $A=\{0,1,2\}$, $\mathbf{U}=\{0,1,2,3,4,5\}$, то $\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A=\{3,4,5\}$.




*а)* *б)*

Рис. 1.3. Операции над множествами:

а) разность множеств *A* и *B*;

б) дополнение множества *A*

### *1.1.6. Системы множеств*

Элементы множества сами могут быть множествами: $A=\{\{1\},\{2,3\},\{1,2\}\}$; в таком случае удобно говорить о системе множеств. Рассмотрим такие системы множеств, как булеан, разбиение и покрытие множеств.

***Булеаном*** В***(X)*** множества *X* называется множество всех подмножеств множества *X*. Например, для множества $X=\{0,1\}$ булеаном является множество $\mathrm{B}(X)=\{\ \varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\ \}$.

***Разбиением*** R***(X)*** множества *X* называется система его непустых непересекающихся подмножеств, в объединении дающая множество *X* (рис. 1.4).

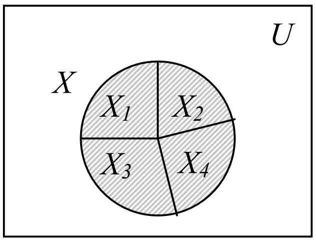



Рис. 1.4. Разбиение множества $\mathrm{R}(X)=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$

Например, для множества $X=\{1,2,3,4,5\}$ можно построить разбиение $\mathrm{R}_1(X)=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$, состоящее из двух элементов (они называются блоками разбиения), или разбиение $\mathrm{R}_2(X)=\{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4\}\}$ – из четырех блоков; возможны и другие разбиения этого множества *X*.

***Покрытием*** **Р*(X)*** множества *X* называется система его непустых подмножеств, в объединении дающая множество *X* (рис. 1.5).

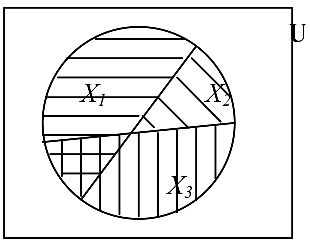



Рис. 1.5. Покрытие множества
Р($X$)=$\{X_1, X_2, X_3\}$

В этом определении отсутствует слово “непересекающаяся” – т.е. блоки могут иметь общие элементы.

*Пример*. Для множества $X=\{1,2,3,4,5\}$ покрытиями являются системы множеств $\mathrm{P}_1(X)=\{\{1\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$ и $\mathrm{P}_2(X)=\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{5\}\}$.

### *1.1.7. Законы алгебры множеств*

Так же, как операции обычной алгебры, операции над множествами выполняются по законам (табл. 1.1), которые доказываются на основе введенных выше определений. Особенностью алгебры множеств является закон идемпотентности, благодаря которому в алгебре множеств нет числовых коэффициентов и степеней.

Таблица 1.1

Законы алгебры множеств

| № | Формулы | Название |
|---|---|---|
| 1 | $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$ | Свойства пустого множества |
| 2 | $A\cup U=U$; $A\cap U=A$; $A\cup\bar{A}=U$ | Свойства универсального множества |
| 3 | $A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$ | Закон коммутативности |
| 4 | $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ | Закон ассоциативности |
| 5 | $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ | Закон дистрибутивности |
| 6 | $\overline{\overline{A}}=A$ | Закон двойного дополнения |
| 7 | $A\cap A=A$; $A\cup A=A$ | Законы идемпотентности |
| 8 | $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; | Законы де Моргана |
| 9 | $A\cup(A\cap B)=A$; $A\cap(A\cup B)=A$ | Законы поглощения |

Докажем закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (1.1)$$

Обозначим $X$ левую часть равенства (1.1), $Y$ – правую. Согласно определению равенства множеств покажем, что выполняются одновременно $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пусть $x$ – произвольная точка из множества $X = A \cup (B \cap C)$. Тогда по определению объединения множеств ($x \in A$ или $x \in (B \cap C)$). Далее по определению пересечения множеств ($x \in A$ или $(x \in B$ и $x \in C)$). Следовательно,

$$((x \in A \text{ или } x \in B) \text{ и } (x \in A \text{ или } x \in C)) \Rightarrow ((x \in A \cup B) \text{ и } (x \in A \cup C))$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = Y$$

Таким образом для любого $x \in X$ выполняется $x \in Y$, т.е. $X \subseteq Y$.

Докажем теперь, что $Y \subseteq X$. Пусть $y$ – произвольная точка из множества $Y = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда

$$(y \in Y) \Rightarrow (y \in A \cup B \text{ и } y \in A \cup C) \Rightarrow ((y \in A \text{ или } y \in B) \text{ и } (y \in A \text{ или }$$

$$y \in C)) \Rightarrow (y \in A \text{ или } (y \in B \text{ и } y \in C)) \Rightarrow (y \in A \text{ или } y \in (B \cap C)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C) = X.$$

В силу произвольности $y \in Y$ заключаем $Y \subseteq X$.

Таким образом, $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, следовательно, $X = Y$, и закон дистрибутивности доказан.

### ***1.1.8. Решение типовых задач по теме «Множества и операции над ними»***

*Задача 1.* Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера-Венна.

Группа туристов из 100 человек пробыла в городе N три дня. За это время драматический театр посетили 28 туристов, оперный – 42, кукольный – 30. И в драматическом, и в оперном побывало 10 человек; в драматическом и кукольном – 8; в оперном и кукольном – 5. Все три театра посетили три человека. Сколько туристов не были ни в одном театре?

*Решение.* В задаче идет речь о трех множествах *Д*, *О*, *К* – зрителей драмы, оперы и кукольного спектакля соответственно. Универсальное множество **U** – это множество туристов группы. Используя обозначение $n(X)$ – количество элементов множества *X*, запишем кратко условие задачи:

$n(\mathbf{U}) = 100;$

$n(Д) = 28; n(О) = 42; n(К) = 30;$

$n(Д \cap О) = 10;\ n(Д \cap К) = 8;\ n(О \cap К) = 5;$

$n(Д \cap К \cap О) = 3.$

В задаче требуется найти $n(\overline{Д \cup О \cup К}) = n(U \setminus (Д \cap О \cap К))$.

Перенесем эти данные на диаграмму Эйлера-Венна. Разметку диаграммы начинаем с множества $Д \cap О \cap К$ – здесь три элемента. В множестве $Д \cap О$ - 10 элементов, но три из них уже учтены. Оставшиеся 7 элементов проставляем на диаграмме и т.д.

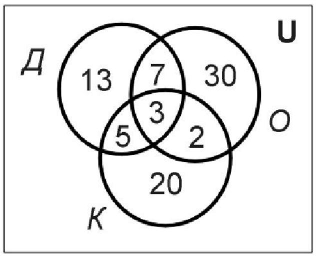



Рис. 1.6. Диаграмма к задаче 1

Теперь на диаграмме (рис. 1.6) все элементы учтены ровно по одному разу, следовательно, количество туристов, которые побывали хотя бы в одном театре, равно

$n(Д \cup О \cup К) = 13 + 7 + 30 + 5 + 3 + 2 + 20 = 80.$

Количество туристов, не побывавших ни в одном театре

$n(\mathbf{U} \setminus (Д \cup О \cup К)) = 100 - 80 = 20.$

*Ответ*: не были ни в одном театре 20 человек.

*Задача 2.* Задано универсальное множество $\mathbf{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и множества $X = \{2,4,7\}, Y\{1,3,5,\}, Z = \{2,3,5,6\}$. Перечислить элементы множества $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X$. Записать булеан множества *X*, какое-либо разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*.

*Решение.* Для нахождения множества *W* выполним операции над множествами в следующем порядке:

1) $\overline{Z} = U \setminus Z = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,3,5,6\} = \{1,4,7\}$ - по определению операции дополнения;

2) $\overline{Z} \cap Y = \{1,4,7\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,7\}$ - по определению операции пере-сечения множеств;

3) $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X = \{1,7\} \cup \{2,4,7\} = \{1,2,4,7\}$.

Итак, $W = \{1,2,4,7\}$.

Для построения булеана множества *X* воспользуемся двоичной записью числа. Если множество *X* содержит *n* элементов, его булеан содержит $2^n$ подмножеств – в нашем случае 8 подмножеств. Будем записывать номер подмножества трехразрядным двоичным числом от 0 до 7, включая в подмножество только те элементы, которым соответствует единица в двоичном разряде (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Булеан множества $X$

| Номер подмножества | Двоичная запись номера | Подмножества множества $X = \{2,4,7\}$ |
|---|---|---|
| 0 | 000 | $\{\} = \varnothing$ |
| 1 | 001 | $\{\quad 7\}$ |
| 2 | 010 | $\{\ 4\ \}$ |
| 3 | 011 | $\{\ 4,7\}$ |
| 4 | 100 | $\{2\quad\}$ |
| 5 | 101 | $\{2,\ 7\}$ |
| 6 | 110 | $\{2,4\ \}$ |
| 7 | 111 | $\{2,4,7\}$ |

Итак, в булеан множества $X$ включаем пустое множество, само множество $X$, все одноэлементные подмножества, все двухэлементные подмножества множества $X$:

$$\mathrm{B}(X) = \{\ \varnothing, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,7\}, \{2,4\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\ \}.$$

Для множества $Y$ построим разбиение, состоящее из трех блоков $\mathrm{R}(Y) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$, например, таким образом:

$$Y_1 = \{1,7\}, Y_2 = \{3\}, Y_3 = \{5\}.$$

Определение разбиения выполняется: множества $Y_1, Y_2, Y_3$ не пусты, не пересекаются ($Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $Y_2 \cap Y_3 = \varnothing$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$), их объединение равно множеству $Y$:

$$Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = (Y_1 \cup Y_2) \cup Y_3 = (\{1,7\} \cup \{3\}) \cup \{5\} = \{1,3,7\} \cup \{5\} = \{1,3,5,7\}.$$

Для построения покрытия выберем подмножества $Z_1 = \{4,7\}$ и $Z_2 = \{2,7\}$. Полученная система множеств $\mathrm{P}(Z) = \{Z_1, Z_2\}$ состоит из двух блоков, объединение которых равно множеству $Z$:

$Z_1 \cup Z_2 = \{4,7\} \cup \{2,7\} = \{2,4,7\} = Z$ .

*Задача 3*. Упростить выражение, пользуясь законами алгебры множеств:

$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B$ .

*Решение.* Договоримся считать, что операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, т.е., если нет скобок, изменяющих приоритет, вначале выполняется пересечение, а затем объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности, определим порядок действий:

$(A \overset{1}{\cap} (\overline{A} \cup B)) \overset{3}{\cup} ((B \cup C) \overset{2}{\cup} B)$ .

Выполним преобразования, указывая номер закона (табл. 1.1) над знаком равенства:

1) $A \cap (\overline{A} \cup B) \overset{5}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \overset{1}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1}{=} A \cap B$ ;

2) $(B \cup C) \cup B \overset{3}{=} (C \cup B) \cup B \overset{4}{=} C \cup (B \cup B) \overset{7}{=} C \cup B$ ;

3) $(A \cap B) \cup (C \cup B) \overset{3}{=} (A \cap B) \cup (B \cup C) \overset{4}{=} ((A \cap B) \cup B) \cup C \overset{3}{=}$
$= (B \cup (A \cap B)) \cup C \overset{9}{=} B \cup C$ .

*Ответ:* $B \cup C$ .

### *1.1.9. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Вставьте обозначения числовых множеств:

____ - множество натуральных чисел;

____ - множество целых чисел;

____ - множество рациональных чисел;

____ - множество действительных чисел.

2. Вставьте пропущенный знак $\in$ или $\notin$ :

117 ____ **N**; 22,4 ____ **Z**; 4/3 ____ **Q**;

$\sqrt{2}$ ____ **Q**; $\sqrt{75}$ ____**R**; π ____ Z.

3. Принадлежит ли множеству корней уравнения $x^2-5x+6=0$ число $x=-3$?

4. Какими способами можно задать множество?

5. Запишите множество действительных корней уравнения $3x+4=0$. Как записать ответ, если требуется найти множество целых корней этого уравнения?

6. Что такое подмножество данного множества? Какой символ используется для записи “множество *A* является подмножеством множества *B*”? Запишите его: *A* ____ *B*.

7. Вставьте пропущенный символ $\in$ или $\subseteq$:

1 ____ {1,2,3}; {1}____ {1,2,3};

$\varnothing$ ____ {1,2,3}; {2,3}____ {1,2,3}.

8. Обведите кружком номер правильного ответа:

Множество всех элементов, принадлежащих как множеству *A*, так и множеству *B*, называется:

1) объединением множеств *A* и *B*;

2) пересечением множеств *A* и *B*;

3) разностью множеств *A* и *B*.

9. Вставьте пропущенные знаки операций над множествами:

$\{a,b,c\}$ ____ $\{d,b,e\}=\{b\}$;

$\{a,b,c\}$ ____ $\{c,d\}=\{a,b,c,d\}$;

$\{a,b,c\}$ ____ $\{a,d\}=\{b,c\}$.

10. Что такое булеан множества *X*?

11. Является ли булеаном множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$?

12. Является ли разбиением множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$? Является ли она покрытием данного множества?

13. Нарисуйте диаграмму Эйлера – Венна для множества $A\cap(B\cup C)$. Нарисуйте диаграмму для $(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Сравните заштрихованную часть на обеих диаграммах. Как называется закон, который Вы проиллюстрировали?

14. Нарисуйте диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой частей закона де Моргана. Сравните их.

15. Запишите законы алгебры множеств. Запомните их названия.

### *1.1.10. Задачи для самоподготовки*

Д и а г р а м м ы Э й л е р а – В е н н а.

1. Четырнадцать спортсменов участвовали в кроссе, 16 – в соревнованиях по плаванию, 10 – в велосипедных гонках. Восемь участников участвовали в кроссе и заплыве, 4 – в кроссе и велосипедных гонках, 9 – в плавании и велосипедных гонках. Во всех трех соревнованиях участвовали три человека. Сколько всего было спортсменов?

2. В туристском клубе несколько раз за лето организуются походы, причем все члены клуба хотя бы раз в них участвуют. Сорок человек побывали в пеших походах, 28 – в конных, 25 – в лодочных. И в пеших, и в конных походах побывало 20 человек, в пеших и лодочных – 15, в конных и лодочных – 8, во всех видах походов побывало 6 человек. Сколько туристов в клубе?

3. В отделе НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Английский язык знают шесть человек, немецкий – шесть человек, французский – семь. Четыре человека знают английский и немецкий языки, три человека – немецкий и французский, два –

французский и английский, один знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

4. Из 80 студентов занимаются баскетболом 30 человек, легкой атлетикой 25 человек, шахматами - 40 человек. Баскетболом и легкой атлетикой занимается 8 человек, шахматами и легкой атлетикой – 10 человек, шахматами и баскетболом – 5 человек. Тремя видами спорта занимаются три человека. Сколько человек занимаются спортом?

5. Десять читателей взяли в библиотеке фантастику, 11 – детективы, 8 – приключения. Фантастику и приключения взяли 4 человека, фантастику и детективы – 6, приключения и детективы – 3, двое взяли три вида книг. Сколько читателей побывало в библиотеке?

6. Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро на ударных инструментах, пятеро на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?

7. Каждый из студентов группы занимается хотя бы одним видом спорта. Пятеро занимаются альпинизмом, шестеро – волейболом, 10 человек – борьбой. Известно, что двое занимаются и альпинизмом, и волейболом; трое – волейболом и борьбой; четверо – альпинизмом и борьбой; а один занимается всеми тремя видами спорта. Сколько студентов занимается только борьбой?

8. В одной из студенческих групп все студенты умеют программировать. Десять человек умеют работать на Бейсике, 10 – на Паскале, 6 – на Си. Два языка знают: 6 человек Бейсик и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Бейсик и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

9. При изучении читательского спроса оказалось, что 60% опрошенных читает журнал “Огонек”, 50% - журнал “Юность”, 50% - журнал “Аврора”.

Журналы “Огонек” и “Юность” читают 30% опрошенных, “Юность” и “Аврора” – 20%, “Огонек” и “Аврора” – 40%, все три журнала – 10%. Сколько процентов опрошенных не читают ни один журнал?

10. В день авиации всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатилось 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, на планере и дельтаплане – 5, два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?

Множества и операции над ними.

1. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{3,5,6,7,8\}, Y = \{1,2,4,6\}, Z = \{1,2,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(Z \cap Y) \cup \overline{X}$.

2. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{1,3,6,7\}, Y = \{3,4,7,8\}, Z = \{3,4,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X \setminus Y) \cap \overline{Z}$.

3. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{5,6,7,8\}, Y = \{1,3,5,6,8\}, Z = \{1,2,5,7\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{X} \cap (Y \setminus Z)$.

4. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{1,5,6,7,8\}, Y = \{2,3,6,7,8\}, Z = \{1,3,5,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{Y} \cap (X \setminus Z)$.

5. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{2,4,5,7,8\}, Y = \{1,2,3,4,6\}, Z = \{1,5,6,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{X} \setminus (Z \cap Y)$.

6. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{2,5,6,7,8\}, Y=\{2,4,6,8\}, Z=\{1,2,3,4\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $X \setminus (Y \cap \overline{Z})$.

7. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{2,4,5,7,8\}, Y=\{1,2,3,4,6\}, Z=\{4,5,6,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{X} \setminus (Z \cap Y)$.

8. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,2,4,6,7\}, Y=\{2,3,5,7,8\}, Z=\{1,4,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X \cup \overline{Y}) \cap Z$.

9. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{2,3,4,5,7\}, Y=\{1,2,4,8\}, Z=\{2,5,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{Z} \setminus (X \cap Y)$.

10. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,3,5,7,8\}, Y=\{2,5,6,8\}, Z=\{1,3,5,6\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X \cap \overline{Y}) \cup Z$.

З а к о н ы а л г е б р ы м н о ж е с т в.

1. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$(A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$

2. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$(A \cap B) \cup (B \cap C) = \overline{(\overline{A} \cap \overline{C})} \cap B.$

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B).$

4. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы): $A\cap(A\cap B)\cup\overline{B}=A\cup\overline{B}$.

5. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$A\cap(\overline{A}\cup B)\cup B\cap(B\cup C)\cup B.$

6. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap C}\cap\overline{\overline{A}\cap B}\cap\overline{A}\cap C.$

7. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$A\cap(\overline{A}\cup B)\cup B\cap(B\cup C)\cup B.$

8. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$(((A\cap B)\cup B)\cap\overline{A})\cup B.$

9. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

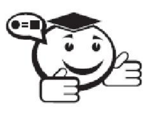
$(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cup\overline{B})=U.$

10. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$A\cup\overline{A\cup\overline{B}}\cap U.$

## 1.2. Бинарные отношения

### *1.2.1. Декартово произведение множеств. Соответствие множеств*



***Декартовым произведением*** $X\times Y$ двух множеств $X$ и $Y$ называется множество <u>всех</u> упорядоченных пар ( $x,y$ ) таких, что $x\in X$ , а $y\in Y$ .

*Пример 1*. Пусть $X=\{1,2\}, Y=\{-1,0,1\}$ . Тогда

$$X\times Y=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\,(2,-1),(2,0),(2,1)\},$$

$$Y\times X=\{(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}.$$

Очевидно, что $X\times Y\neq Y\times X$, т.е. для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется.

Декартовым произведением множеств $X_1,X_2,\ldots,X_n$ будем называть множество $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ всех упорядоченных наборов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ таких, что $x_i\in X_i, i=1,2,\ldots,n.$ Если $X_1=X_2=\ldots=X_n$, то декартово произведение обозначают $X^n$.

Будем говорить, что задано соответствие $q$ между множествами $X$ и $Y$, если задана упорядоченная тройка $q=(X,Y,Q)$, где $Q\subseteq X\times Y$. Множество $X$ называется областью отправления, а $Y$ – областью прибытия соответствия $q$ (обозначают $q:X\to Y$). Каждый элемент $y$ в паре $(x,y)\in Q$ называется образом элемента $x$ ($x$ – прообразом элемента $y$) при данном соответствии $q$.

Соответствие $q=(X,Y,Q)$ называется ***отображением*** множества $X$ во множество $Y$, если каждый элемент $x\in X$ имеет образ $y=q(x)\in Y$, т.е.

$$\forall x\in X\ \exists\, y\in Y:(x,y)\in Q.$$

Отображение $f:X\to Y$ называется ***функциональным***, если каждый элемент $x\in X$ имеет ***единственный*** образ $y=f(x)\in Y$:

$$\forall x\in X\ \exists!\, y\in Y: y=f(x)\in Y.$$

Множество образов при данном отображении $f:X\to Y$ обозначается $f(X)\subseteq Y$:

$$f(X)=\{y|\ \exists x\in X: y=f(x)\}.$$

Если множество $f(X)$ совпадает с множеством $Y$, то говорят, что $f:X\to Y$ осуществляет отображение <u>*на*</u> множество $Y$.

Соответствие $f: X \to Y$ называется ***взаимно однозначным (биекцией)***, если

а) является отображением;

б) функционально;

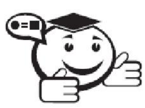
в) отображает $X$ “на” множество $Y$;

г) из условия $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Другими словами, $f: X \to Y$ является биекцией, если каждый элемент $x \in X$ имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ имеет единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in X$ при данном отображении:

$$\begin{cases} \forall x \in X \ \exists! y \in Y : y = f(x); \\ \forall y \in Y \ \exists! x \in X : x = f^{-1}(y). \end{cases} \qquad (1.2)$$

### *1.2.2. Определение бинарного отношения*



Говорят, что на множестве $X$ задано бинарное отношение $R$, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т.е. $R \subseteq X \times X$).

*Пример 2*. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на $X$ следующие отношения:

$T = \{(x, y) \mid x, y \in X, x = y\}$ – отношение равенства;

$P = \{(x, y) \mid x, y \in X, x = y - 1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y) \mid x, y \in X, x$ делится на $y\}$ – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Ниже перечислены элементы этих отношений:

$T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$;

$P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$;

$Q = \{(4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)\}$.

Тот факт, что пара ( $x$, $y$ ) принадлежит данному отношению $R$, будем записывать: $(x,y)\in R$ или $xRy$. Например, для отношения $Q$ запись $4Q2$ означает, что 4 делится на 2 нацело, т.е. $(4,2)\in Q$.

***Областью определения*** $D_R$ бинарного отношения $R$ называется множество $D_R=\{x|\ (x,y)\in R\}$.

***Областью значений*** $E_R$ называется множество $E_R=\{y|\ (x,y)\in R\}$.

Так, для отношения $P$ из примера 2 областью определения является множество $D_P=\{1,2,3\}$, а областью значений – $E_P=\{2,3,4\}$.

### *1.2.3. Способы задания бинарного отношения*

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания бинарного отношения: график отношения, схема отношения, граф отношения, матрица отношения.

***График*** отношения изображается в декартовой системе координат; на горизонтальной оси отмечается область определения, на вертикальной – область значений отношения; элементу отношения ( $x,y$ ) соответствует точка плоскости с этими координатами. На рис. 1.7, *а* приведен график отношения $Q$ примера 2.

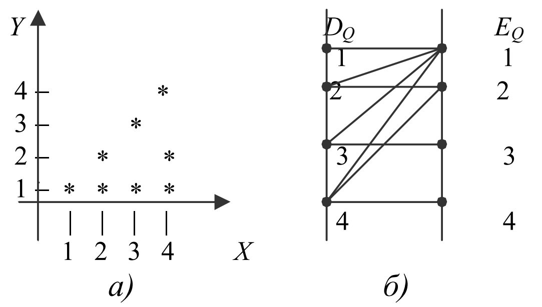



Рис. 1.7. График отношения $Q$ (*а*) и схема отношения $Q$ (б)

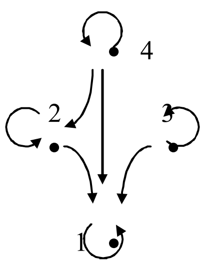
***Схема*** отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая – множеству значений отношения. Если элемент ( $x,y$ ) принадлежит отношению $R$, то соответствующие точки из $D_R$ и $E_R$ соединяются прямой. На рис. 1.7, *б* приведена схема отношения Q из примера 2.

***Граф*** отношения $R \subseteq X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки – элементы множества $X$. Пара точек $x$ и $y$ соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара ( $x,y$ ) принадлежит отношению $R$. На рис. 1.8, *а* приведен граф отношения $Q$ примера 2.

***Матрица*** отношения $R \subseteq X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества $X$. На пересечении строки $x$ и столбца $y$ ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй - номеру столбца. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда матрица отношения $R \subseteq X \times X$ имеет $n$ строк и $n$ столбцов, а ее элемент $r_{ij}$ определяется по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (x_i, y_j) \notin R, \quad i, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

На рис.1.8, *б* приведена матрица отношения $Q$ примера 2.




$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

*а*) *б*)

Рис. 1.8. Граф (*а*) и матрица (*б*) отношения $Q$

### *1.2.4. Свойства бинарных отношений*

Бинарные отношения делятся на типы в зависимости от свойств, которыми они обладают. Рассмотрим следующие отношения на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$:

$G = \{(x, y)|\ x, y \in X, x > y\}$;

$L = \{(x, y)|\ x, y \in X, x \le y\}$;

$M = \{(x, y)|\ x, y \in X, (x - y)$ делится на $3\}$;

$K = \{(x, y)|\ x, y \in X, x^2 + y^2 \le 20\}$.

Отношение $R$ на множестве $X$ называется ***рефлексивным,*** если для всех $x \in X$ выполняется условие $(x, x) \in R$. Среди приведенных выше отношений рефлексивными являются отношение $L$ (т.к. неравенство $x \le x$ справедливо при всех $x \in X$) и отношение $M$ (т.к. разность $x - x = 0$ делится на 3, значит, пара $(x, x)$ принадлежит отношению $M$ при всех $x \in X$).

Отношение $R$ на множестве $X$ называется ***антирефлексивным***, если условие $(x, x) \in R$ не выполняется ни при одном $x \in X$. Примером антирефлексивного отношения является отношение $G$ (неравенство $x > x$ не выполняется ни при каких значениях $x$, следовательно, ни одна пара $(x, x)$ не принадлежит отношению $G$). Отметим, что отношение $K$ не является рефлексивным $(5^2 + 5^2 > 20 \Rightarrow (5,5) \notin K)$ и не является антирефлексивным $(1^2 + 1^2 \le 20 \Rightarrow (1,1) \in K)$.

Отношение $R$ на множестве $X$ называется ***симметричным***, если из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Симметричными являются отношения $M$ (если $x - y$ делится на 3, то и $y - x$ делится на 3) и $K$ (если $x^2 + y^2 \le 20$, то и $y^2 + x^2 \le 20$).

Отношение $R$ на множестве $X$ называется ***несимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \notin R$. Несимметричным является отношение *G*, т.к. условия $x < y$ и $y < x$ не могут выполняться одновременно (только одна из пар $(x, y)$ или $(y, x)$ принадлежит отношению *G*).

Отношение *R* на множестве *X* называется ***антисимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$. Антисимметричным является отношение *L*, т.к. из одновременного выполнения $x \le y$ и $y \le x$ следует $x = y$.

Отношение *R* на множестве *X* называется ***транзитивным***, если для любых $x, y, z \in R$ из одновременного выполнения условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Отношения *G, L, M* являются транзитивными, а отношение *К* нетранзитивно: если $x = 3, y = 2, z = 4,$ то $3^2 + 2^2 \le 20$ и $2^2 + 4^2 \le 20$, но $3^2 + 4^2 \ge 20$, то есть выполняются условия $(x, y) \in K$ и $(y, z) \in K$, но $(x, z) \notin K$.

### *1.2.5. Отношения эквивалентности*

Рассмотрим три отношения: *M, S, H*. Отношение *M* описано в 1.2.4. Отношение *S* введем на множестве *X* всех треугольников следующим образом: этому отношению принадлежат пары треугольников такие, что площадь треугольника *x* равна площади треугольника *y*.

Отношение *H* действует на множестве жителей г. Томска и содержит пары $(x, y)$ такие, что *x* и *y* носят шляпы одинакового размера.

Свойства этих трех отношений приведены в таблице 1.3, где *P* означает рефлексивность, *AP* – антирефлексивность, *C* – симметричность, *AC* - антисимметричность, *HC* – несимметричность, *T* – транзитивность отношения. В качестве упражнения проверьте правильность заполнения таблицы, пользуясь определениями свойств бинарных отношений.

Таблица 1.3

Свойства отношений

| Отношение | Р | АР | С | АС | НС | Т |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | + | - | + | - | - | + |
| S | + | - | + | - | - | + |
| H | + | - | + | - | - | + |

Мы видим, что отношения обладают одинаковыми свойствами, поэтому их относят к одному типу.

Отношение $R$ на множестве $X$ называется отношением ***эквивалентности,*** если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Таким образом, отношения *M, S, H* являются отношениями эквивалентности на соответствующих множествах *X*. Важной особенностью отношений эквивалентности является то, что они разбивают все множество *X* на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

***Классом эквивалентности***, порожденным элементом $x \in X$, называется подмножество $[x]$ множества *X*, для элементов которого выполняется условие $(x, y) \in R, y \in X$. Таким образом, класс эквивалентности $[x] = \{y \mid y \in X, (x, y) \in R\}$.

Так, отношение *M* разбивает множество $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ на три класса эквивалентности: $[1] = \{1,4,7\}, [2] = \{2,5\}, [3] = \{3,6\}$. Класс, порожденный элементом 4, совпадает с классом [1]; [5] = [2], [3] = [6], [7] = [1].

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества *X*, в объединении дающую все множество *X* – т.е. образуют разбиение множества *X* (см. 1.1.6).

Отношение эквивалентности обозначают “ $\equiv$ “, поэтому определение класса эквивалентности можно записать так: $[x]=\{y|\ y\in X, x\equiv y\}$.

Множество различных классов эквивалентности множества *X* по отношению *R* называется ***фактор-множеством*** и обозначается $X|_R$. Так, для отношения *M* фактор-множество состоит из трех элементов:

$X|_M=\{[1],[2],[3]\}$.

*Теорема 1.* Пусть *R* – отношение эквивалентности на множестве *X* и $X|_R$ - совокупность всех различных классов эквивалентности по отношению *R*. Тогда $X|_R$ - разбиение множества *X*.

*Доказательство.* По условию теоремы *R* – отношение эквивалентности, т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно. Покажем, что $X|_R=\{K_1,K_2,...,K_r\}$ - разбиение множества *X*, т.е.

а) $K_i\subseteq X, K_i\neq\varnothing$;

б) $\bigcup\limits_{i=1}^{r}K_i=X$;

в) $K_i\cap K_j=\varnothing,\ \ i\neq j,\ i,j=\overline{1,r}$.

Условие *а* выполняется по определению класса эквивалентности и по свойству рефлексивности, т.к. $x\in[x]$ для любого $x\in X$.

Условие *б* выполняется, так как каждый элемент множества *X* попадает в какой-либо класс эквивалентности и $\bigcup\limits_{x\in X}[x]=X$.

Условие *в* докажем методом “от противного”. Пусть $K_i=[x]$ и $K_j=[y]$ - разные классы эквивалентности (т.е. $K_i$ и $K_j$ отличаются хотя бы одним элементом). Покажем, что они не пересекаются. Предположим противное: найдется элемент $z\in X$ такой, что $z\in K_i$ и $z\in K_j$. По определению класса эквивалентности $z\equiv x$ и $z\equiv y$. По свойствам симметричности и транзитивности отношения $R$ имеем: $(x \equiv z$ и $z \equiv y) \Rightarrow (x \equiv y)$ - отсюда следует равенство множеств $K_i$ и $K_j$.

Действительно, возьмем произвольный элемент $a \in K_i : a \in [x] \Rightarrow$

$a \equiv x \Rightarrow a \equiv y \Rightarrow a \in K_j$ в силу произвольности $a$ следует $K_i \subseteq K_j$. Возьмем произвольный элемент $b \in K_j$: $b \in [y] \Rightarrow b \equiv y \Rightarrow b \equiv x \Rightarrow b \in K_i$ - в силу произвольности $b$ следует $K_j \subseteq K_i$. По определению равенства множеств $K_i = K_j$.

Условие *в* доказано: если классы эквивалентности не совпадают, то они не пересекаются.

Следовательно, фактор-множество $X|_R$ является разбиением множества *X*.

*Теорема 2*. Всякое разбиение множества *X* порождает на *X* отношение эквивалентности.

*Доказательство*. Пусть $\{X_1, X_2, ..., X_r\}$ - разбиение множества *X*. Рассмотрим на *X* отношение $R = \{(x, y)|$ найдется $X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i$ и $y \in X_i\}$.

Покажем, что *R* – отношение эквивалентности.

Рефлексивность отношения *R* следует из условия $\bigcup_{i=1}^{r} X_i = X$. Каждый элемент множества *X* попадает в одно из множеств $X_i, i = \overline{1, r}$, поэтому $\forall x \in X \, \exists X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i \Rightarrow (x, x) \in R$.

Покажем, что отношение *R* симметрично. Пусть $(x, y) \in R$. Это означает, что

$\exists X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i$ и $y \in X_i \Rightarrow y \in X_i$ и $x \in X_i \Rightarrow (y, x) \in R$.

Покажем, что *R* транзитивно. Пусть $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Тогда найдется множество $X_i : x \in X_i$ и $y \in X_i$ и множество $X_j : y \in X_j$ и $z \in X_j$. Но так как различные блоки разбиения не пересекаются, а $y \in X_i \cap X_j$, то $X_i = X_j$. Следовательно, $(x, z) \in R$ и $R$ транзитивно.

Отношение $R$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности. Теорема доказана.

### *1.2.6. Отношения порядка*

Рассмотрим отношения *G, L* из 1.2.4, отношение *Q* из 1.2.2 и отношение включения *V* на множестве всех подмножеств целых чисел (B(**Z**) – булеан множества **Z**): $V = \{(X, Y) | \; X, Y \in \text{B}\,(\mathbf{Z}), X \subseteq Y\}$.

Таблица 1.4

Свойства отношений

| Отношение | Р | АР | С | АС | НС | Т |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G | - | + | - | - | + | + |
| L | + | - | - | + | - | + |
| Q | + | - | - | + | - | + |
| V | + | - | - | + | - | + |

Мы видим, что по свойствам эти отношения разделились на два типа.

*Определение*. Отношение *R* на множестве *X*, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, называется отношением ***порядка*** на множестве *X* (обозначается “$\preceq$”).

*Определение*. Отношение *R* на множестве *X*, обладающее свойствами антирефлексивности, несимметричности, транзитивности, называется отношением ***строгого порядка***.

Таким образом, отношения *L, Q, V* являются отношениями порядка на соответствующих множествах, а отношение *G* – отношением строгого порядка.

### *1.2.7. Частично упорядоченные множества*

Если на множестве *X* введено отношение порядка $\preceq$, то получен новый объект $(X, \preceq)$ – частично упорядоченное множество. Так, различные частично упорядоченные множества ($\mathbf{N}, \le$) и ($\mathbf{N}, \mid$) можно получить, рассматривая на множестве **N** натуральных чисел отношения сравнения “ $\le$ ” ($x \le y$ - $x$ меньше или равно $y$ и делимости “ $\mid$ ” ($x \mid y$ - $x$ является делителем $y$). Слово “частично” используется потому, что не все элементы множества могут быть сравнимы между собой. Для частично упорядоченного множества ($\mathbf{N}, \mid$) несравнимы элементы $2 \in \mathbf{N}$ и $3 \in \mathbf{N}$, так как ни один из них не является делителем другого.

Если все элементы множества сравнимы между собой, мы имеем линейный порядок, например, ($\mathbf{N}, \le$) – линейно упорядоченное множество.

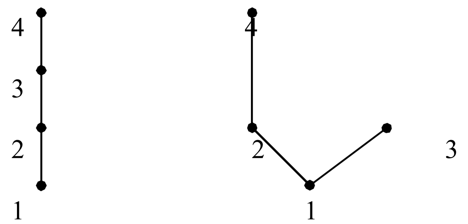
### *1.2.8. Диаграммы Хассе*

Для наглядного представления частично упорядоченного множества $(X, R)$ используют диаграмму Хассе – граф отношения *R* без петель и транзитивно замыкающих дуг.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим на множестве *X* отношения порядка “ $\le$ ” и “ $\mid$ ”. Получим два частично упорядоченных множества ($X, \le$) и ($X, \mid$), различия которых наглядно отражают их диаграммы Хассе (рис.1.9).

*Определение*. Элемент $w \in X$ называется ***наибольшим*** элементом частично упорядоченного множества $(X, \preceq)$, если $\forall x \in X \Rightarrow x \preceq w$. Элемент $u \in X$

называется ***максимальным*** элементом частично упорядоченного множества $(X,\preceq)$, если в множестве $X$ нет элемента $y$ такого, что $u \preceq y$.




*а*) *б*)

Рис. 1.9. Диаграммы Хассе частично упорядоченных множеств

Элемент $w=4$ является наибольшим и одновременно максимальным для ($X$, $\le$ ) (рис. 1.9, *а*). В частично упорядоченном множестве ($X$, $|$ ) есть два максимальных $u_1=4$ и $u_2=5$, но нет наибольшего (рис. 1.9, *б*).

Аналогично определяются понятия наименьшего и минимального элементов частично упорядоченного множества.

*Теорема*. Всякое частично упорядоченное множество имеет не более одного наибольшего элемента.

*Доказательство*. Пусть $(X,\preceq)$ – частично упорядоченное множество. Теорема утверждает, что если в множестве $(X,\preceq)$ имеется наибольший элемент, то он единственный. Предположим противное: пусть имеется два различных наибольших элемента $w \in X$ и $w' \in X$. Тогда по определению наибольшего элемента $w \preceq w'$ и $w' \preceq w$, откуда в силу антисимметричности отношения порядка “ $\preceq$ ” следует $w'=w$ - противоречие, что и доказывает теорему.

### *1.2.9. Изоморфизм частично упорядоченных множеств*

Частично упорядоченные множества $(X,\preceq)$ и ($Y$, $\preceq'$) ***изоморфны***, если чуществует биекция $\varphi: X \to Y$, сохраняющая отношение порядка, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \preceq x_2$, выполняется $\varphi(x_1) \preceq' \varphi(x_2),\ \ \varphi(x_1), \varphi(x_2) \in Y$.

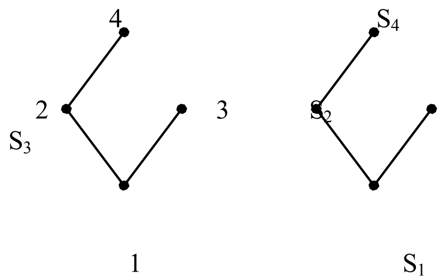
*Пример.* Рассмотрим множество $T$ точек горизонтальной прямой, упорядоченное отношением $L$ – “лежит левее или совпадает”, и множество действительных чисел **R** с введенным на нем отношением порядка “$\leq$”. Тогда $(T,L)$ изоморфно $(\mathbf{R}, \leq)$ и, решив задачу на множестве **R**, мы иллюстрируем решение с помощью множества $T$, так как структура этих множеств одинакова.

*Теорема.* Всякое частично упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству его булеана, упорядоченному отношением включения.

*Пример.* Рассмотрим частично упорядоченное множество $(X, \mid)$ из 1.2.7. Так как $X=\{1,2,3,4\}$ состоит из $n=4$ элементов, то его булеан $\mathbf{B}(X)$ содержит $2^4=16$ элементов – подмножеств множества $X$. Выберем из них 4 подмножества следующим образом: сопоставим каждому элементу $x \in X$ подмножество $S_x \in$ $\mathbf{B}(X)$, включающее те и только те элементы $y$, которые являются делителями элемента $x$:

$$S_x=\{y|\ y\in X, y/x\}.$$

Получим множество $F=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}\subseteq \mathbf{B}(X)$, где $S_1=\{1\}$, $S_2=\{1,2\}$, $S_3=\{1,3\}$, $S_4=\{1,2,4\}$. Частично упорядоченные множества $(X, \mid)$ и $(F,\subseteq)$ изоморфны (рис. 1.10).




*а*) *б*)

Рис. 1.10. Диаграммы Хассе изоморфных частично упорядоченных множеств

*Доказательство теоремы*. Пусть задано произвольное упорядоченное множество $(X,\preceq)$. Построим подмножество $F \subseteq$ **B**($X$) с помощью соответствия: каждому элементу $x \in X$ сопоставим $f(x) = S_x = \{y \mid y \in X, y \preceq x\}$ и обозначим $F = \{S_x\}_{x \in X}$.

Покажем, что соответствие $f : X \to F$ является биекцией, т.е. выполняются условия *а* – *г* определения биекции из 1.2.1. Условия *а* – *в* выполняются согласно способу построения множества *F*: каждый элемент $x \in X$ имеет единственный прообраз $f(x) = S_x$, а каждый элемент $S_x$ множества *F* имеет прообраз $x \in X$. Покажем, что этот прообраз – единственный. Предположим противное: существует два различных элемента $a,b \in X$, имеющие одинаковые прообразы $f(a)$ и $f(b)$, т.е. $a \neq b$, но $S_a = f(a) = f(b) = S_b$.

В силу рефлексивности отношения порядка “$\preceq$” имеем:

$a \preceq a \Rightarrow a \in S_a \Rightarrow a \in S_b \Rightarrow a \preceq b$.

Аналогично,

$b \preceq b \Rightarrow b \in S_b \Rightarrow b \in S_a \Rightarrow b \preceq a$.

Так как отношение порядка антисимметрично, получим $a = b$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, различные элементы $S_a, S_b \in F$ имеют различные прообразы: $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$, а отображение $f : X \to F$ является биекцией.

Докажем, что биекция $f : X \to F$ сохраняет порядок, т.е. если $a,b \in X$ и $a \preceq b$, то $f(a) = S_a \subseteq S_b = f(b)$. Согласно определению включения множеств достаточно показать, что $\forall x \in S_a$ выполняется $x \in S_b$.

Возьмем произвольный элемент $x \in S_a$. Тогда $x \preceq a$, но $a \preceq b$, поэтому $x \preceq b$ (в силу транзитивности отношения порядка) и $x \in S_b$. Доказано включение $S_a \subseteq S_b$.

Итак, построенное отображение $f: X \to F \subseteq$ **B**($X$) является биекцией, сохраняющей отношение порядка. Следовательно, частично упорядоченные множества ($X$, $\mid$ ) и ( $F, \subseteq$) изоморфны. Теорема доказана.

### *1.2.10. Решение типовых задач по теме «Бинарные отношения»*

*Задача 1.* На множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R \subseteq X \times X : R = \{(x, y) | \; x, y \in X, (x + 2y)$ делится на $3\}$. Представить отношение $R$ различными способами; выяснить, какими свойствами оно обладает; является ли отношение $R$ отношением эквивалентности или отношением порядка.

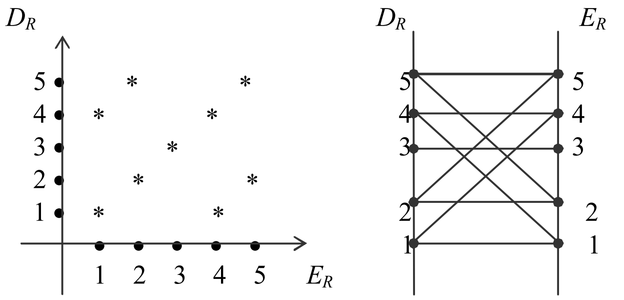
*Решение*. Отношение $R$ можно задать перечислением всех элементов:

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,4), (4,1), (5,2), (2,5)\}$.

Наглядно представить отношение $R$ можно с помощью графика (рис. 1.11, *а*), схемы (рис. 1.11, *б*), графа (рис. 1.12, *а*), матрицы отношения (рис. 1.12, *б*).

Выясним, какими свойствами обладает отношение.

Покажем, что отношение рефлексивно. При $x = y$ условие “$x + 2y$ делится на 3” принимает вид $x + 2x = 3x -$ делится на 3 (выполняется при любых значениях $x \in X$ ).



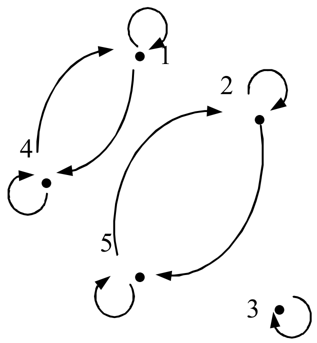

*а*) *б*)

Рис. 1.11. График (*а*) и схема (*б*) отношения $R$

Проверим, является ли отношение симметричным. Пусть $x+2y$ делится на 3 (т.е. $(x,y)\in R$). Составим пару $(y,x)$ и для нее проверим характеристическое свойство отношения:

$$y+2x = y+2x+(x+2y)-(x+2y) = 3y+3x-(x+2y) =$$
$$= 3(y+x)-(x+2y).$$

Очевидно, что $3(y+x)$ делится на 3, а $x+2y$ делится на 3 по условию, следовательно, $y+2x$ делится на 3, т.е. $(y,x)\in R$. Отношение симметрично.




$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

*а*) *б*)

Рис. 1.12. Граф (*а*) и матрица (*б*) отношения *R*

Проверим, является ли отношение транзитивным. Пусть $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, т.е. $x+2y$ делится на 3 и $y+2z$ делится на 3. Будет ли делиться на 3 выражение $x+2z$, т.е. будет ли $(x,z)\in R$? Преобразуем $x+2z =$ $= x+3y+2z-3y = x+2y+y+2z-3y = (x+2y)+(y+2z)-3y$ делится на 3, т.к. первые два слагаемых делятся на 3 по условию и третье слагаемое $(-3y)$ делится на 3. Значит $(x,z)\in R$, и отношение транзитивно.

Отношение *R* обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. На графе отношения *R* (рис. 1.12, *а*) хорошо видны классы эквивалентности – это подмножества {1,4}, {2,5}, {3} множества *X*.

*Задача 2*. Дано множество $X=\{2,3,4,6,12\}$ и отношение $R=\{(x,y)|\ x,y\in X, x-$ делитель $y\}$. Показать, что отношение *R* является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества $(X,R)$. Существуют ли в множестве $X$ наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

*Решение*. Покажем, что отношение $R$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Рефлексивность имеет место, так как любое число является своим делителем, т.е. $\forall x \in X \Rightarrow (x,x) \in R$.

Пусть одновременно выполняются условия: $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R$. Тогда $x = y$. Действительно, $(x,y) \in R$ означает, что $x$ – делитель $y$, т.е. найдется целое число $m$ такое, что $y = m \cdot x$. Одновременно найдется целое число $n$ такое, что $x = n \cdot y$. Отсюда $y = m \cdot n \cdot y$ и $m \cdot n = 1$. Последнее равенство выполняется при $m = n = 1$ или $m = n = -1$, но все элементы множества $X$ – положительные числа, и второй случай невозможен. Следовательно, $m = n = 1$, т.е. $x = y$, и отношение $R$ антисимметрично.

Пусть $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R$, значит, найдутся $m,k \in \mathbf{Z}$ такие, что $y = m \cdot x$, $z = k \cdot y$. Тогда $z = k \cdot (m \cdot x) = (k \cdot m) \cdot x = n \cdot x$, где $n = m \cdot k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $x$ является делителем $z$ и $(x,z) \in R$. Отношение $R$ транзитивно.

Отношение $R$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка. Построим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества $(X,R)$. На нижнем (первом) уровне диаграммы поместим элементы $x \in X$, не имеющие других делителей, кроме себя ($x = 2$ и $x = 3$). На втором уровне – элементы, не имеющие других делителей, кроме себя и элементов нижнего уровня ($x = 4$ и $x = 6$). Оставшийся элемент $x = 12$ делится на себя, на все элементы второго и первого уровней – помещаем его на третий уровень. Соединяем отрезком элементы соседних уровней, если элемент нижнего уровня является делителем элемента соседнего верхнего уровня. Диаграмма Хассе построена (рис. 1.13). Пара элементов $(x,y) \in R$ тогда и только тогда, когда двигаясь по диаграмме только вверх, мы можем пройти от элемента $x$ до элемента $y$.

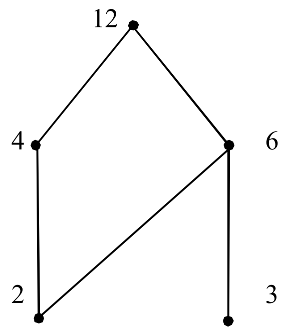



Рис. 1.13. Диаграмма Хассе

По диаграмме Хассе легко обнаружить несравнимые элементы: 4 и 3; 2 и 3. Наибольшим элементом является $w = 12$ (для всех $x \in X$ выполнено условие "*x* является делителем 12"). Наименьшего элемента нет, но есть два минимальных: $u_1 = 2$ и $u_2 = 3$.

### *1.2.11. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Вставьте пропущенный знак "=" или "≠":

{3,5} _____ {5,3}; (3,5) _____ (5,3).

2. Нарисуйте график декартова произведения $X \times Y$, где $X = \{1,5\}$, $Y = \{2,3\}$. Совпадает ли он с графиком $Y \times X$?

3. Дайте определение бинарного отношения на множестве *X*.

4. Обведите кружком номер правильного ответа:

5. Областью определения бинарного отношения *R* называется множество

1) $\{(x, y) \mid x, y \in R\}$;

2) $\{x \mid x, y \in R\}$;

3) $\{y \mid x, y \in R\}$.

6. Найдите область определения и область значений отношения $Q$ из примера 2 (п.п 1.2.2).

7. Какими способами можно задать бинарное отношение?

8. Нарисуйте график и схему отношения $P$ из примера 2 (см. 1.2.2).

9. Какое отношение является рефлексивным?

10. Какой особенностью обладает матрица рефлексивного отношения? А матрица симметричного отношения?

11. Вставьте пропущенное слово:

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, называется отношением _________________ .

12. Запись $[x]$ используется для обозначения ________ ______________ .

13. Какое отношение называется отношением порядка?

14. Что такое частично упорядоченное множество?

15. Пусть $R$ –отношение делимости. Какой порядок (частичный или линейный) задает это отношение на множестве $X = \{1, 3, 6, 12\}$? А на множестве $Y = \{1, 2, 3, 6,\}$? Построить диаграммы Хассе для $(X, R)$ и $(Y, R)$.

16. Что такое изоморфизм частично упорядоченных множеств? Изоморфны ли $(X, R)$ и $(Y, R)$

### *1.2.12. Задачи для самоподготовки*

Б и н а р н ы е о т н о ш е н и я и и х с в о й с т в а

Постановка задачи:

На множестве $X$ задано бинарное отношение $R$. Представить отношение различными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

Решить задачу для следующих бинарных отношений, заданных на соответствующих множествах:

1. $X = \{1, 2, 3, 4\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b - \text{четное}, \quad a, b \in X\}$.

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b < 5, a, b \in X\}$.

3. $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b = 3, a, b \in X\}$.

4. $R = \{(1,2), (1,1), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$

5. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b \text{ делится на } 3, a, b \in X\}$.

6. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b \text{ делится на } 2, a, b \in X\}$.

7. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b \text{ делится на } 3, a, b \in X\}$.

8. $X = \{1, 2, 3, 4\}$. $R = \{(a,b) \mid a + b < 4, a, b \in X\}$.

9. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(a,b) \mid |a - b| = 2, a, b \in X\}$.

10. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(a,b) \mid a - b > 1, a, b \in X\}$.

### Частично упорядоченные множества

Постановка задачи:

Дано множество $X$ и отношение $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение $R$ является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества $(X, R)$. Существует ли в множестве $X$ наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

Решить задачу для следующих множеств:

1. $X = \{1, 2, 3, 6\}$

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

3. $X = \{2, 3, 6, 18\}$

4. $X = \{1, 2, 4, 8\}$

5. $X = \{3, 6, 9, 18\}$

6. $X = \{1, 3, 5, 15\}$

7. $X = \{1, 3, 6, 9\}$

8. $X = \{3, 5, 15, 30\}$

9. $X = \{1, 5, 7, 10, 14\}$

10. $X = \{5, 10, 15, 20\}$

## 1.3 Реляционная алгебра

### *1.3.1. Применение отношений для обработки данных*

Отношение может быть не только бинарным, в общем случае отношением называется подмножество $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, т.е. элементом отношения является упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, n$. При обработке данных наборы из *n* элементов называют *записями*, *i*-му элементу набора соответствует *i*-ое поле записи. Записи группируются в файлы, и если файлы содержат совокупность записей, удовлетворяющих некоторым отношениям, мы получаем *базу данных*. Таким образом, отношение удобно представлять в виде таблицы, каждая строка которой соответствует записи, а столбец – определенному полю записи.

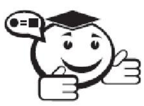
Любая ли таблица может задавать отношение? Очевидными являются следующие *требования*:

1) порядок столбцов таблицы фиксирован;
2) каждый столбец имеет название;
3) порядок строк таблицы произволен;
4) в таблице нет одинаковых строк.

Число *n* столбцов таблицы называется ***степенью*** отношения (говорят, что задано *n*-арное отношение). Число строк в таблице – количество элементов отношения. Математическая модель, описывающая работу с такими таблицами, называется *реляционной алгеброй*.

### *1.3.2. Теоретико-множественные операции реляционной алгебры*

Так как отношения являются множествами, к ним применимы обычные операции теории множеств: пересечение, объединение, разность. Но в отличие от алгебры множеств в реляционной алгебре эти операции могут быть применены не к любым, а только к ***совместимым*** отношениям. Два отношения будем называть совместимыми, если их степени равны, а соответствующие поля относятся к однотипным множествам. Первое требование означает, что объединение, пересечение и разность определяются только для таблиц с одинаковым количеством столбцов, а второе – в соответствующих столбцах должны располагаться однотипные данные (не выполняется операция пересечения множества фамилий и множества зарплат).



***Пересечением*** двух отношений $R$ и $S$ называется множество $R \cap S$ всех записей, каждая из которых принадлежит как $R$, так и $S$ (рис. 1.14, *а*, *б*).

$R$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *a* |
| *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *a* |

$S$

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| | | |
| *b* | *c* | *a* |

*а*)

$R \cap S$

| $C_1$ | $C_2$ | $C_2$ |
|---|---|---|
| *b* | *c* | *a* |

*б*)

$R \cup S$

| $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *a* |
| *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *a* |
| *a* | *b* | *c* |

*в*)

$R \setminus S$

| $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *a* |
| *b* | *a* | *c* |

*г*)

Рис. 1.14. Операции над совместимыми отношениями
а) данные отношения $R$ и $S$;
б) пересечение отношений $R$ и $S$;
в) объединение отношений $R$ и $S$;
г) разность отношений $R$ и $S$

***Объединением*** двух отношений $R$ и $S$ называется множество $R \cup S$ записей, которые принадлежат хотя бы одному из отношений $R$ или $S$ (рис.1.14, *а*, *в*).

***Разностью*** двух отношений $R$ и $S$ называется множество $R \setminus S$ всех записей, каждая из которых принадлежит отношению $R$, но не принадлежит отношению $S$ (рис.1.14, *а*,*г*).

В реляционной алгебре вводится операция расширенного декартова произведения. Пусть $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – элемент $n$-арного отношения $R$, а $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ – элемент $m$-арного отношения $S$. ***Конкатенацией*** записей $r$ и $s$ назовем запись $(r, s) = (r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots, s_m)$, полученную приписыванием записи $s$ к концу записи $r$.

$R$

| $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $a$ | $c$ |
| $c$ | $e$ |

$S$

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| $k$ | $l$ | $m$ |
| $b$ | $k$ | $c$ |

$R \times S$

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $k$ | $l$ | $m$ |
| $a$ | $b$ | $b$ | $k$ | $c$ |
| $a$ | $c$ | $k$ | $l$ | $m$ |
| $a$ | $c$ | $b$ | $k$ | $c$ |
| $c$ | $e$ | $k$ | $l$ | $m$ |
| $c$ | $e$ | $b$ | $k$ | $c$ |

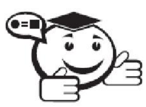
Рис. 1.15. Расширенное декартово произведение
отношений $R$ и $S$

***Расширенным декартовым произведением*** отношений $R$ и $S$ называется множество $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$, элементами которого являются все возможные конкатенации записей $r \in R$ и $s \in S$. Отметим, что полученное отношение имеет степень $n + m$ и важен порядок выполнения операции: $R \times S \neq S \times R$.

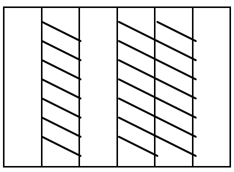
В качестве упражнения запишите расширенное декартово произведение $S \times R$ для отношений $R$ и $S$ (рис. 1.15) и сравните с отношением $R \times S$.

### *1.3.3. Специальные операции реляционной алгебры*

При поиске информации в базе данных мы часто выполняем однотипные действия: выбор записей, отвечающих заданному условию; исключение полей, содержащих не интересующие нас в данный момент факты и т.п. Поэтому, кроме теоретико-множественных, в реляционной алгебре применяются и специальные операции. Рассмотрим некоторые из них.



Пусть задано отношение $R$ и список $c = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ – упорядоченное подмножество номеров столбцов. ***Проекцией*** отношения $R$ на список $c$ называется отношение $\pi_c R = \{r[c] \mid r \in R\}$, записи которого содержат только те поля, которые указаны в списке $c$. Таким образом, операция проекции позволяет получить " вертикальное " подмножество отношения $R$ (рис. 1.16, *а*). Операция проекции выполняется в два этапа: 1) выписываем записи отношения $R$, включая только те поля, которые указаны в списке $c$; 2) вычеркиваем в полученной таблице повторяющиеся строки (рис. 1.16, *б*, *в*).



*а*)

$R$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *a* | *d* | *c* |
| *b* | *l* | *k* |
| *l* | *m* | *d* |

*б*)

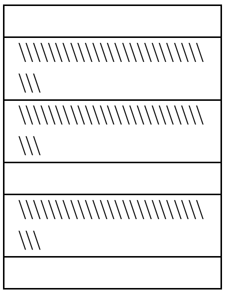
$\pi_{(3,1)}R$

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *c* | *a* |
| *k* | *b* |
| *d* | *l* |

*в*)

Рис. 1.16. Операции проекции
а) проекция – "вертикальное" подмножество;
б) данное отношение $R$;
в) проекция $\pi_{(3,1)}R$ отношения $R$ на список $c = (3,1)$

Операция селекции (выбора) дает возможность построения "горизонтального" подмножества отношения, т.е. подмножества записей, обладающих заданным свойством. Обозначим $F$ – логическое условие, которому должны удовлетворять искомые записи. ***Селекцией*** отношения $R$ по условию $F$ называется отношение $\sigma_F R$, содержащее те и только те записи отношения $R$, для которых условие $F$ истинно (рис. 1.17).



$R$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| a | b | c |
| a | d | c |
| b | l | k |
| l | m | d |

$\sigma_{"A1=a"}R$

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| a | b | c |
| a | d | c |

*а*) *б*) *в*)

Рис. 1.17. Селекция отношения $R$ по условию $F=\sigma_{"A1=a"}R$

***Соединение*** отношений по условию $F$ обозначается $R \underset{F}{\rhd\lhd} S$ и представляет собой отношение, записями которого являются конкатенации $(r,s)$, удовлетворяющие условию $F$. Таким образом, соединение можно выполнить в два этапа: 1) выполнить операцию расширенного декартова произведения $R \times S$; 2) выполнить селекцию полученного отношения по условию $F$.

$$R \underset{F}{\rhd\lhd} S = \sigma_F(R \times S)$$

На рис. 1.18. приведен пример соединения отношений $R$ и $S$ по условию $F$ - $"A_1 < B_1"$, где знак “ < ” означает лексикографический (алфавитный) порядок.

$R$

| $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|
| a | b |
| b | c |

$S$

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| a | b | c |
| c | a | b |
| b | c | a |

$R \underset{F}{\rhd\lhd} S$

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | a | b |
| a | b | b | c | a |
| b | c | c | a | b |

Рис. 1.18. Соединение отношений $R$ и $S$

### *1.3.4. Решение типовой задачи по теме «Реляционная алгебра»*

*Задача.* Отношения $R$ и $S$ заданы в виде таблиц (рис. 1.19, *а*). Совместимы ли эти отношения? Записать обозначение проекции $R$ на список $c=(3,2)$ и выполнить эту операцию. Записать обозначение соединения отношений $R$ и $S$ по условию $F$ – "$A_2 \geq B_1$" и выполнить эту операцию.

*Решение.* Степень отношения $R$ равна 3 (три столбца в таблице), степень отношения $S$ равна 2 (два столбца), значит, отношения $R$ и $S$ несовместимы и над ними нельзя выполнять операции пересечения, объединения, разности.

Обозначение операции проекции $\pi_{(3,2)}R$. Чтобы выполнить эту операцию, выписываем третье и второе поле всех записей в новую таблицу (вычеркнули столбец $A_1$, столбцы $A_2$ и $A_3$ поменяли местами); одинаковых строк нет (рис. 1.19, *б*).

Обозначение операции соединения - $R \underset{A_2 \geq B_1}{\triangleright\triangleleft} S = \sigma_{A_2 \geq B_1}(R \times S)$.

Результат операции $R \times S$ – девять записей (к каждой строке таблицы $R$ приписываем строку таблицы $S$). Вычеркиваем строки, не удовлетворяющие условию $"A_2 \geq B_1"$, т.е. строки, второй элемент которых стоит в алфавите раньше четвертого ( рис. 1.19, *в*).

$R$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *k* | *m* | *t* |
| *b* | *a* | *d* |

$S$

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *b* | *k* |
| *c* | *m* |
| *d* | *t* |

*а*)

$\pi_C R$

| $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|
| *c* | *b* |
| *t* | *m* |
| *d* | *a* |

*б*)

$R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S$

| $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *b* | *k* |
| *k* | *m* | *t* | *b* | *k* |
| *k* | *m* | *t* | *c* | *m* |
| *k* | *m* | *t* | *d* | *l* |

*в*)

Рис. 1.19. Операции над отношениями $R$ и $S$
а) данные отношения;
б) проекция отношения $R$ на список $c$ =(3,2);
в) соединение отношений $R$ и $S$ по условию
$F$= "$A_2 \geq B_1$"

### *1.3.5. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. При каких условиях таблица является аналогом *n*-арного отношения?

2. Что называется степенью такого отношения?

3. Какие отношения в реляционной алгебре называются совместимыми?

4. Составьте конкатенацию записей “ пас ” и “ тор ”.

5. Отношение $R$ имеет степень 3, отношение $S$ – 4. Какую степень будет иметь отношение $R \times S$?

6. Операция проекции отношения $R$ на список столбцов обозначается

______________________ .

7. Как выполняется операция селекции отношения $R$ по условию $F$?

8. Какие операции и в каком порядке нужно выполнить:

$$\pi_{(3,2)}(\sigma_{A_1 < A_2}(R \cup S))\ ?$$

### *1.3.6. Задачи для самоподготовки*

1. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *C* |
| *a* | *c* | *d* |
| *b* | *d* | *a* |
| *d* | *a* | *b* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *d* | *b* |
| *a* | *c* | *d* |
| *b* | *d* | *a* |

Записать обозначения операций и выполнить их:
а) селекция отношения $R$ по условию “$A_2 > b$”;
б) проекция на список (3,1) объединения отношений $R$ и $S$.

2. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *a* | *d* |

| | | |
|---|---|---|
| *a* | *c* | *d* |
| *b* | *d* | *a* |
| *d* | *a* | *b* |

| | |
|---|---|
| *a* | *c* |
| *c* | *d* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:
а) проекция отношения *R* на список (1,3);
б) соединение отношений *R* и *S* по условию “$A_2 = B_1$”.

3. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *D* |
| *b* | *c* | *D* |
| *b* | *a* | *D* |
| *a* | *b* | *C* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *b* | *c* |
| *a* | *c* |
| *a* | *d* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:
а) проекция отношения *R* на список (1,3);
б) соединение отношений *R* и *S* по условию “$A_1 > B_1$”.

4. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *c* | *e* | *f* |
| *a* | *b* | *d* |
| *d* | *e* | *f* |
| *c* | *d* | *c* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *f* | *d* |
| *e* | *c* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:
а) проекция отношения *R* на список (2,3);
б) соединение отношений *R* и *S* по условию “$A_3 = B_1$”.

5. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *b* | *a* | *c* |
| *a* | *c* | *b* |
| *a* | *d* | *b* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *c* | *b* |
| *a* | *d* | *e* |
| *a* | *d* | *b* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:
а) селекция отношения *R* по условию “$A_2 > A_3$”;
б) проекция на список (3,1) объединения отношений *R* и S.

6. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|
| *s* | *t* |
| *u* | *v* |
| *x* | *z* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *s* | *u* | *t* |
| *u* | *v* | *t* |
| *z* | *s* | *x* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения *S* по условию “$B_1 > B_3$”;

б) соединение отношений *R* и *S* по условию “$A_1 = B_2$”.

7. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *e* | *d* |
| *a* | *b* | *c* |
| *d* | *a* | *b* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *b* | *e* | *d* |
| *d* | *e* | *c* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения *R* по условию “$A_1 > A_2$”;

б) проекция на список (2,3) объединения отношений *R* и *S*.

8. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|
| *x* | *y* |
| *y* | *z* |
| *x* | *t* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| *u* | *t* | *v* |
| *x* | *z* | *y* |
| *y* | *z* | *v* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения *S*;

б) соединение отношений *R* и *S* по условию “$A_1 < B_2$”.

9. Заданы отношения:

*R:*

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *d* | *e* |
| *d* | *c* | *b* |
| *b* | *d* | *a* |

*S:*

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *d* | *e* |
| *d* | *c* |
| *a* | *c* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения *R*;

б) соединение отношений $R$ и $S$ по условию “ $A_1 \geq B_1$ ”.

10. Заданы отношения:

$R$:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *a* | *c* | *d* |
| *b* | *c* | *d* |

$S$:

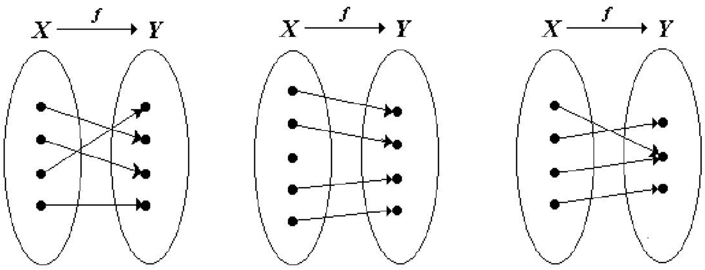
| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| *b* | *e* |
| *b* | *c* |
| *d* | *c* |

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:
а) проекция на список (3,2) отношения $R$;
б) соединение отношений $R$ и $S$ по условию “ $A_1 = B_1$ ”.

## 1.4. Конечные и бесконечные множества

### *1.4.1. Равномощные множества*

Напомним, что отображение $f: X \to Y$ является биекцией (см.1.2.1) тогда и только тогда, когда каждый элемент $x$ множества $X$ имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ имеет единственный прообраз $x \in X$, т.е. $x = f^{-1}(y)$. Так, соответствие между множествами $X$ и $Y$ на рис. 1.20, *а* является биекцией, а на рис. 1.20, *б*, *в* – не является биекцией (объясните почему).




*а*) *б*) *в*)

Рис. 1.20. Соответствие множеств $X$ и $Y$

а) биективное;

б) в) не биективное

<u>*Определение*</u>. Будем говорить, что множества $X$ и $Y$ ***равномощны***, если существует биекция множества $X$ на множество $Y$.

*Пример*. Покажем, что множества $X=[0;1]$ и $Y=[1;3]$ равномощны. Действительно, можно установить биекцию $f:X\to Y$, например, по закону $y=2x+1$(рис. 1.21, *а*). Биекцию между множествами $X$ и $Y$ можно установить и геометрически (рис. 1.21, *б*). Через левые концы отрезков проведена прямая $l$, через правые – прямая $m$. Точка пересечения прямых $l$ и $m$ обозначена $M$. Из точки $M$ проводим лучи, пересекающие оба отрезка; при этом точке пересечения с лучом на первом отрезке соответствует единственная точка пересечения с лучом на втором отрезке (и наоборот).

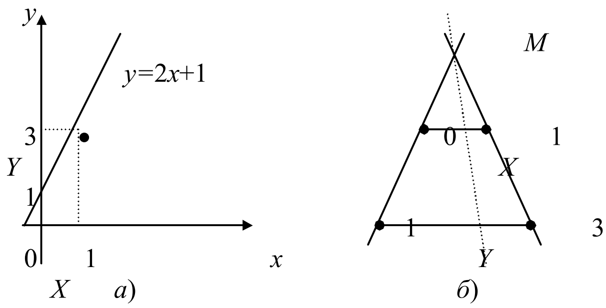



Рис. 1.21. Равномощность множеств
$X=[0;1]$ и $Y=[1;3]$
а) графическая иллюстрация;
б) геометрическое отображение

### *1.4.2. Классы равномощных множеств*

Введенное в 1.4.1 отношение равномощности является отношением эквивалентности “ ≡ “. В самом деле, оно рефлексивно: для каждого множества $X$ справедливо $X\equiv X$ ($X$ равномощно $X$), так как существует тождественное отображение множества $X$ на множество $X$. Это отношение симметрично: если существует биекция $X$ на $Y$, то обратное отображение также является биекцией (если $X\equiv Y$, то $Y\equiv X$). Отношение транзитивно: если существует биекция $f:X\to Y$ и существует биекция $g:Y\to Z$, то соответствие $z=g(f(x))$ отображает $X$ на $Z$ биективно (если $X\equiv Y$ и $Y\equiv X$, то $X\equiv Z$).

По свойству отношения эквивалентности (см. 1.2.5) получаем разбиение всех множеств на непересекающиеся классы равномощных множеств. Каждому классу присвоим название - *кардинальное число*. Таким образом, кардинальное число – это то общее, что есть у всех равномощных множеств. Обозначим кардинальное число множества $X - card\ X$ или $|X|$. Пустое множество имеет кардинальное число $card\ \varnothing$ =0; для всех конечных множеств кардинальное число совпадает с количеством элементов множества; а для обозначения кардинального числа бесконечных множеств используется буква $\aleph$ (алеф). Понятие кардинального числа (мощности множества) обобщает понятие " количество элементов " на бесконечные множества.

### *1.4.3. Сравнение множеств по мощности*

Расположим классы эквивалентности равномощных множеств в порядке возрастания кардинальных чисел: $0,1,2,\ldots,n,\ldots,\aleph_0,\aleph_1,\aleph_{2,\ldots}$.

Для конечных множеств это не вызывает затруднений: $|X|<|Y|$ означает для конечных множеств, что количество элементов множества $X$ меньше количества элементов множества $Y$, и класс $|X|$ расположен левее класса $|Y|$ в последовательности классов равномощных множеств. А что означает неравенство $|X|<|Y|$ для бесконечных множеств? Договоримся о следующих обозначениях:

1) если множества $X$ и $Y$ попадают в один класс эквивалентности, пишем $|X|=|Y|$;

2) если класс эквивалентности множества $X$ находится левее класса эквивалентности $Y$ в ряду кардинальных чисел, используем обозначение $|X|<|Y|$;

3) если класс эквивалентности множества $X$ находится правее класса эквивалентности множества $Y$, то $|X|>|Y|$;

4) в теории множеств строго доказано, что случай, когда множества $X$ и $Y$ несравнимы по мощности, невозможен – это означает, что классы равномощных множеств можно вытянуть в цепочку без разветвлений по возрастанию мощности.

Следующая теорема, приведенная без доказательства, позволяет устанавливать равномощность бесконечных множеств.

***Теорема Кантора-Бернштейна.*** Пусть $X$ и $Y$ два бесконечных множества. Если во множестве $X$ есть подмножество, равномощное множеству $Y$, а во множестве $Y$ есть подмножество, равномощное $X$, то множества $X$ и $Y$ равномощны.

*Пример*. Пусть $X=[0;1], Y=(0;+\infty)$. Покажем, что $|X|=|Y|$. Непосредственно биекцию $X$ на $Y$ построить трудно, т.к. $X$ - отрезок с включенными концами, а $Y$ – открытый интервал.

Применим теорему Кантора-Бернштейна. Возьмем в качестве подмножества $X_1$ множества $X$ открытый интервал : $X_1=(0;1)\subseteq[0;1]=X$. Биекция $X_1$ на $Y$ легко устанавливается: например, по закону $y=\log_{0,5}x$ (рис. 1.22) , осуществляется взаимно однозначное отображение интервала (0;1) на интервал $(0;+\infty)$.

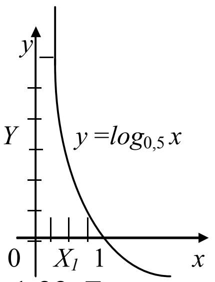



Рис. 1.22. Биекция множества $X_1$=(0;1) на множество $Y$ = (0;+∞)

В качестве подмножества $Y_1\subseteq Y$ возьмем любой замкнутый интервал из $Y$, например, $Y_1=[1;3]\subseteq(0;+\infty)=Y$. В 1.4.1 уже показано, что $|[1;3]|=|[0;1]|$ (существует биекция $y=2x+1$). Таким образом, условия теоремы Кантора-

Бернштейна выполняются, следовательно, множества $X=[0;1]$ и $Y=(0;+\infty)$ равномощны ($|X|=|Y|$).

### *1.4.4. Свойства конечных множеств*

Множество $X$ называется ***конечным***, если существует биекция $f:X\to\{1,2,\ldots,n\}$, т.е. множество $X$ можно взаимно однозначно отобразить на отрезок натурального ряда $\{1,2,\ldots,n\}$; при этом $|X|=n$.

Все множества, для которых такую биекцию установить невозможно, будем называть ***бесконечными.***

Пустое множество принято относить к конечным множествам и обозначать $|\varnothing|=0$.

Сформулируем свойства конечных множеств в виде теорем (не все теоремы будут строго доказаны).

*Теорема* (правило суммы). Пусть множество $X$ является объединением $r$ непересекающихся конечных множеств $X_i, i=1,2,\ldots r$. Тогда $|X|=\sum\limits_{i=1}^{r}|X_i|$.

Согласно условию теоремы система множеств $\{X_1,X_2,\ldots,X_r\}$ является разбиением множества $X$. Доказательство проведем методом математической индукции по числу $r$ блоков разбиения.

*Шаг 1.* Покажем, что теорема справедлива при $r=2$. Пусть $X=X_1\cup X_2$, $X_1\cap X_2=\varnothing$ и множества $X_1,X_2$ конечны, т.е. существует биекция $f_1:X\to\{1,2,\ldots,n_1\}$ и $f_2:X\to\{1,2,\ldots,n_2\}$. Установим биекцию $f:X\to\{1,2,\ldots,n_1+n_2\}$ следующим образом: всем элементам множества $X_1$ оставим прежние номера, а номера элементов множества $X_2$ увеличим на число $n_1$. Полученное отображение

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), \textit{если } x\in X_1; \\ n_1+f_2(x), \textit{если } x\in X_2 \end{cases}$$

является биекцией $f: X \to \{1,2,\dots,n_1+n_2\}$ в силу биективности $f_1$ и $f_2$. Следовательно, $|X| = n_1+n_2 = |X_1|+|X_2|$. Основание индукции доказано.

*Шаг 2* . Индукционный переход заключается в следующем: предположим, что теорема справедлива при числе блоков разбиения $r-1$; докажем, что в этом случае она будет справедлива и при числе блоков *r*.

Предположение: множества $Y_i, i=1,2,\dots r-1,$ конечны и образуют разбиение множества *Y*. Тогда $|Y| = \sum_{i=1}^{r-1}|Y_i| = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$.

Рассмотрим разбиение множества $X$ на $r$ конечных множеств. Тогда $X=\bigcup_{i=1}^{r} X_i = (X_1\cup X_2 \cup \ldots \cup X_{r-1})\cup X_r$ по закону ассоциативности объединения. Обозначим $Y=\bigcup_{i=1}^{r-1} X_i$. Опираясь на основание индукции (шаг 1), имеем $|X| = |Y\cup X_r| = |Y|+|X_r|$, а по индукционному предположению $|X| = \left|\bigcup_{i=1}^{r-1} X_i\right| + |X_r| = \sum_{i=1}^{r-1}|X_i| + |X_r| = \sum_{i=1}^{r}|X_i|$. Индукционный переход доказан.

*Заключение*. Согласно методу математической индукции, теорема справедлива для любого натурального числа *r* блоков разбиения.

<u>*Теорема*</u> (правило произведения). Пусть конечное множество $X$ представлено в виде декартова произведения $r$ конечных множеств $X_1\times X_2\times\ldots\times X_r$. Тогда $|X| = |X_1|\cdot|X_2|\cdot\ldots\cdot|X_r|$.

Правило произведения доказывается методом математической индукции аналогично правилу суммы.

<u>*Теорема*</u> ( о мощности булеана конечного множества). Пусть множество $X$ конечно и $|X|=n$. Тогда $|\mathrm{B}(X)| = 2^n$.

Напомним, что **B**($X$) есть булеан множества $X$, т.е. множество всех подмножеств множества $X$. При построении булеана в 1.1.8 мы использовали эту теорему без доказательства.

*Доказательство*. Множество $X$ конечно, значит, существует биекция $f: X \to \{1, 2, ..., n\}$. Зафиксируем порядок элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и рассмотрим множество $V$ всех упорядоченных наборов длины $n$, состоящих из нулей и единиц:

$$V = \{(v_1, v_2, ..., v_n) | \ v_i \in \{0,1\}, i = 1,2,...,n\}.$$

Установим взаимно однозначное соответствие (биекцию) $\varphi: V \to \mathrm{B}(X)$ следующим образом: элементу $(v_1, v_2, ..., v_n) \in V$ сопоставляем множество $Y \in \mathrm{B}(X)$, содержащее те и только те элементы $x_i \in X$, для которых $v_i = 1, i = 1,2,...,n$. Легко проверить, что данное соответствие является биекцией. Таким образом, множество $V$ и $\mathrm{B}(X)$ равномощны. Но множество $V$ является декартовым произведением $n$ одинаковых сомножителей $E = \{0,1\}$, т.е. $V = E^n$ и по теореме о мощности произведения $|V| = \left|E^n\right| = |E|^n = 2^n$, следовательно, и $|\mathrm{B}(X)| = 2^n$.

<u>*Теорема*</u> (правило включения – исключения). Пусть $X_1$ и $X_2$ конечные множества. Тогда $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

Доказательство теоремы опирается на правило суммы. Представим множество $X_1 \cup X_2$ в виде объединения непересекающихся множеств $X_1 \cup X_2 = A \cup B \cup C$, где $A = X_1 \setminus X_2$, $B = X_1 \cap X_2$ , $C = X_2 \setminus X_1$. Тогда по правилу суммы $|X_1 \cup X_2| = |A| + |B| + |C|$, но $X_1 = A \cup B$, $X_2 = B \cup C$, поэтому $|X_1| = |A| + |B|$, $|X_2| = |B| + |C|$. Имеем $|X_1| + |X_2| = |A| + |B| + |B| + |C|$, отсюда $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |B| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

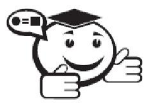
<u>*Теорема*</u> (обобщенное правило включения – исключения).

Пусть конечное множество $X$ является объединением $r$ конечных множеств: $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$. Тогда

$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |X_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} \left|X_i \cap X_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k \le r} \left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| - ... + (-1)^{r+1} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_r|.$$

Теорема доказывается методом математической индукции по числу $r$ блоков покрытия множества $X$.

### *1.4.5. Определение счетного множества*



Будем говорить, что множество $X$ ***счетно***, если оно равномощно множеству натуральных чисел **N**.

*Пример 1*. Пусть $X$ множество нечетных натуральных чисел. Покажем, что $X$ счетно. Для этого нужно установить биекцию множества $X$ на множество натуральных чисел, т.е. занумеровать элементы множества $X$ так, чтобы каждому элементу $X$ соответствовал ровно один номер, а любому натуральному числу соответствовал ровно один элемент из $X$. Очевидно, соответствие $f_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}$, удовлетворяет этим требованиям:

$$\begin{array}{l} X = \{1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ 2n-1, \ldots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ \ n, \ldots\} \end{array}$$

Таким образом, $|X| = |\mathbf{N}|$ и $X$ счетно.

*Пример 2*. Пусть $X$=**N**×**N** – декартово произведение множества N на себя. Покажем, что $X$ счетно. Расположим все элементы $X$ в виде матрицы (рис. 1.23) и занумеруем его элементы “ по диагоналям ”: номер 1 присвоим элементу (1,1), номер 2 – элементу (2,1), 3 – (1,3) и т.д.

| | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1,1)_1$ | $(1,2)_3$ | $(1,3)_6$ | … |
| 2 | $(2,1)_2$ | $(2,2)_5$ | $(2,3)_9$ | … |
| 3 | $(3,1)_4$ | $(3,2)_8$ | $(3,3)_{13}$ | … |
| | … | … | … | … |
| … | | | | |

Полученное отображение $X$ на **N** также является биекцией (хотя записать формулу в явном виде сложнее, чем в примере 1).

Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$. Когда мы пишем $|X|=\aleph_0$, мы утверждаем, что множество $X$ счетно, т.е. относится к тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел. А множество **N** считается эталоном (образцом) счетных множеств.

### *1.4.6. Свойства счетных множеств*

Покажем, что класс счетных множеств расположен в ряду мощностей левее любых других классов бесконечных множеств, а предшествуют ему только классы конечных множеств (рис. 1.24).

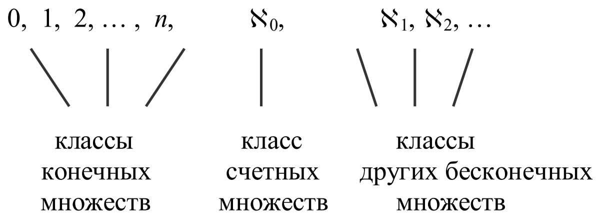



Рис. 1.24. Ряд мощностей множеств

Основой для такого утверждения служат следующие теоремы о счетных множествах.

<u>*Теорема 1*</u>. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Пусть $X$ – счетное множество, а $Y \subseteq X$ – произвольное его подмножество. Занумеруем элементы множества $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ и выберем тот элемент, который имеет минимальный номер и принадлежит подмножеству $Y$, – обозначим его $y_1$. Затем рассмотрим множество $X \setminus \{y_1\}$ и найдем в нем элемент с минимальным номером, принадлежащий $Y$, - обозначим $y_2$, и т.д. Если на $n$-ом шаге мы не обнаружим в множестве $X \setminus \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ элементов множества $Y$, то $Y$ конечно и $|Y|=n$. В противном случае (если процесс будет продолжаться бесконечно) множество $Y$ счетное, т.к. указан способ нумерации его элементов.

*Теорема 2*. Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

Пусть $X$ – бесконечное множество. Выберем произвольный элемент $x_1 \in X$. Так как $X$ бесконечно, то $X \setminus \{x_1\} \neq \varnothing$. Обозначим $x_2$ произвольный элемент из $X \setminus \{x_1\}$. Далее найдется $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, $x_4 \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}, \ldots$ . Поскольку $X$ бесконечно, этот процесс не может оборваться из-за "нехватки" элементов, и мы получим счетное подмножество $Y$ множества $X$: $Y = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq X$.

*Теорема 3*. Объединение конечного или счетного количества счетных множеств есть множество счетное.

Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - счетные множества. Будем считать, что они попарно не пересекаются (в противном случае перейдем от множеств $X_n$ к множествам $Y_n = X_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} X_k$, которые попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$). Все элементы множества $X$ запишем в виде бесконечной матрицы:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots \\ x_{31} & x_{34} & x_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix},$$

где в первой строке записаны элементы множества $X_1$, во второй – $X_2$ и т.д. Занумеруем эти элементы "по диагонали" (как в примере 2 из 1.4.5), при этом устанавливается биекция между множествами $X$ и **N**, т.е. $X$ – счетное множество.

*Теорема 4*. Пусть $X$ бесконечное множество, а $Y$ – счетное. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.

Теорема утверждает, что добавление счетного множества элементов не увеличивает мощность бесконечного множества.

*Доказательство*. Рассмотрим множество $Z = X \cup Y$ и представим его в виде объединения непересекающихся множеств $Z = X \cup Y_1$, где $Y_1 = Y \setminus X$. Так как $Y$ счетно, то $Y_1$ конечно или счетно (по теореме 1). Множество $X$ бесконечно, значит, существует счетное подмножество $X_1 \subseteq X$ (по теореме 2). Тогда $X = X_1 \cup (X \setminus X_1)$, а

$$Z = X \cup Y_1 = X_1 \cup (X \setminus X_1) \cup Y_1 = (X \setminus X_1) \cup (X_1 \cup Y_1).$$

По теореме 3 $X_1 \cup Y_1$ счетно, т.е $|X_1 \cup Y_1| = |X_1|$. Поэтому $|Z| = |(X \setminus X_1) \cup X_1| = |X|$. Теорема доказана.

В примере 1 из 1.4.5 мы установили, что множество **N** равномощно своему собственному подмножеству. Рассуждения, близкие к доказательству теоремы 4, позволяют утверждать, что таким свойством обладает не только множество **N**, но любые бесконечные множества.

Рассмотренные четыре теоремы показывают, что среди бесконечных множеств счетные множества являются наименьшими по мощности. Существуют ли множества более чем счетные?

### *1.4.7. Несчетные множества*

Рассмотрим множество $X = [0;1] \subset \mathbf{R}$. Сравним его с множеством **N**. Очевидно, что $|[0;1]| \geq |\mathbf{N}|$. Действительно, отрезок [0;1] содержит счетное подмножество $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$, значит, является не менее, чем счетным. Покажем, что [0;1] и **N** не являются равномощными множествами, т.е. что $|[0;1]| \neq \aleph_0$.

<u>*Теорема*</u>. Множество точек отрезка [0;1] не является счетным.

Проведем доказательство методом “от противного”. Предположим, что множество [0;1] счетно, т.е. существует биекция **N** на [0;1], и каждому элементу отрезка можно присвоить номер: $[0;1] = \{a_i |\ a_i \in [0;1], i \in \mathbf{N}\}$. Каждый элемент отрезка [0;1] представляется в виде бесконечной десятичной дроби $a_i = 0,\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\ldots$, где $\alpha_{ij}$– *j*-я десятичная цифра *i*-го элемента. Запишем все элементы $a_i, i \in \mathbf{N}$, в порядке возрастания номеров. Покажем, что найдется элемент *b*, принадлежащий отрезку [0;1], но не совпадающий ни с одним из занумерованных элементов $a_i, i \in \mathbf{N}$. Метод построения такого элемента называется диагональной процедурой Кантора и заключается в следующем. Будем строить элемент $b$ в виде бесконечной десятичной дроби $b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, где $\beta_i$ – $i$-я десятичная цифра. В качестве $\beta_1$ возьмем любую цифру, не совпадающую с $\alpha_{11}$, $\beta_2$ – любую цифру, не совпадающую с $\alpha_{22}$, и т.д., $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ при любых $n \in \mathbf{N}$ (рис. 1.25). Построенный таким образом элемент $b$ принадлежит отрезку [0;1], но отличается от каждого из занумерованных элементов $\alpha_i$ хотя бы одной цифрой. Следовательно, предположение о том, что существует биекция $f\colon\ \mathbf{N} \to [0;1]$ ошибочно, и множество [0;1] не является счетным.

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0,\boxed{\alpha_{11}}\alpha_{12}\alpha_{13}\ \ \ldots \\
a_2 = 0,\alpha_{21}\boxed{\alpha_{22}}\alpha_{23}\ \ \ldots \\
a_3 = 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\boxed{\alpha_{33}}\ \ \ldots \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
a_n = 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ \ \ldots \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots
\end{array}$$

Рис. 1.25. Диагональная процедура Кантора

Итак, мы показали, что $|[0;1]| > |\mathbf{N}|$, т.е. класс эквивалентности, которому принадлежит отрезок [0;1], расположен правее класса $\aleph_0$ счетных множеств в ряду мощностей (рис. 1.25). Обозначим этот класс $\aleph$ (без индекса). Множества, принадлежащие этому классу, называются ***несчетными*** или множествами мощности ***континуум*** (континуум – непрерывный). Этому классу принадлежат и интервал (0;1), и множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, и множество точек круга на плоскости.

*Пример.* Множество $\mathbf{R}$ имеет мощность континуума, т.к. равномощно отрезку [0;1]. Действительно, по теореме Кантора-Бернштейна (см. 1.4.3) $|[0;1]| = |(0;1)|$. Биекцию интервала (0;1) на множество $\mathbf{R}$ можно задать с помощью сложной функции $y = f(g(x))$, где $z = g(x)$ имеет вид $z = \pi x - \frac{\pi}{2}$ и отображает интервал (0;1) на интервал $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, а $y = f(z)$ отображает интервал $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ на **R** по закону $y = tg\, z$ .

### *1.4.8. Булеан бесконечного множества. Выводы*

Мы показали, что несчетные множества имеют мощность большую, чем счетные. А существуют ли множества наибольшей мощности? На этот вопрос отвечает теорема, на основании которой мы можем утверждать, что не существует множества наибольшей мощности: для каждого множества *X* мы можем построить его булеан, т.е. множество большей мощности. Это означает, что ряд мощностей (рис. 1.25) неограничен.

*Теорема*. Пусть *X* – бесконечное множество. Мощность булеана множества *X* больше мощности множества *X*.

*Доказательство*. Очевидно, что мощность булеана **B**(*X*) не меньше мощности множества *X*: булеан имеет подмножество одноэлементных множеств, равномощное множеству *X*. Остается показать, что $|\mathrm{B}(X)| \neq |X|$.

Предположим противное: пусть $|\mathrm{B}(X)| = |X|$. Это означает, что существует биекция $\varphi : X \to \mathrm{B}(X)$, т.е. каждый элемент *x* множества *X* имеет единственный прообраз $\varphi(x) = M_x \in \mathrm{B}(X)$, а каждый элемент булеана имеет единственный прообраз во множестве *X*. Рассмотрим множество $M_0 = \{x | \ x \in X, x \notin \varphi(x)\}$ . Покажем, что множество $M_0$ хотя и принадлежит булеану $\mathrm{B}(X)$, но не имеет прообраза $x_0$ во множестве *X*.

Действительно, пусть такой элемент $x_0$ существует, т.е. $x_0 \in X, \varphi(x_0) = M_0$. Тогда возможны два варианта: а) $x_0 \in M_0$, б) $x_0 \notin M_0$.

Случай а) невозможен, т.к. $M_0 = \varphi(x_0)$ и $\forall x \in M_0$ выполняется $x \notin \varphi(x)$, следовательно, $x_0 \notin \varphi(x_0) = M_0$. Аналогично невозможен и случай б): $x_0 \notin M_0$, значит, $x_0 \in \varphi(x_0)$, но $\varphi(x_0) = M_0$. Полученное противоречие показывает, что не существует элемента $x_0 \in X$, являющегося прообразом множества $M_0 \in \mathrm{B}(X)$.

Следовательно, предположение о равномощности множеств $X$ и $\mathrm{B}(X)$ неверно и остается принять $|\mathrm{B}(X)| > |X|$.

Итак, используя понятие “мощность”, мы сравниваем между собой не только конечные, но и бесконечные множества. Мощность – это то общее, что есть у всех равномощных множеств, а общим у них является класс эквивалентности. Мы говорим, что множество имеет мощность $\aleph_0$, и это означает, что оно принадлежит тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел; мы говорим, что множество имеет мощность континуума, и это означает, что оно принадлежит тому же классу, что и отрезок [0;1] (табл. 1.5). Другие классы бесконечных множеств используются реже, чем счетные и несчетные.

Таблица 1.5

Мощность множества

| Множество | Эталон | Мощность |
|---|---|---|
| Конечное | {1, 2, … ,n} | n |
| Счетное | **N** | $\aleph_0$ |
| Несчетное | [0;1] | $\aleph$ |

### *1.4.9. Решение типовых задач по теме «Конечные и бесконечные множества»*

*Задача 1.* Даны множества $A = \{-2, -1, 0\}$ и $B = \{4n-1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$ ?

*Решение.* Множество $A$ конечно и задано перечислением своих элементов, множество $B$ задано характеристическим свойством. Запишем несколько первых элементов множества $B=\{3,7,11,15,\ldots\}$. Видим, что $A\cap B=\varnothing$ и $|A\cap B|=0$, т.е. множество $A\cap B$ конечно.

Покажем, что множество $A\cup B=\{-2,-1,0,3,7,11,15,\ldots\}$ счетно. Занумеруем его элементы:

$$z_n=\begin{cases}-2, & n=1,\\ 0, & n=2,\\ 4n-13, & n\ge 3.\end{cases}\qquad n\in N.$$

Задана биекция множества **N** на множество $A\cup B$, следовательно, $A\cup B$ счетно и $|A\cup B|=\aleph_0$.

По определению декартова произведения $A\times B=\{(a,b)|\ a\in A, b\in B\}$. Запишем элементы этого множества в виде матрицы (рис. 1.26) и занумеруем их по столбцам.

| $A\downarrow B\rightarrow$ | 3 | 7 | 11 | 15 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | $(-2,3)_1$ | $(-2,7)_4$ | $(-2.11)_7$ | $(-2,15)_{10}$ | … |
| -1 | $(-1,3)_2$ | $(-1,7)_5$ | $(-1,11)_8$ | $(-1,15)_{11}$ | … |
| 0 | $(0,3)_3$ | $(0,7)_6$ | $(0,11)_9$ | $(0,15)_{12}$ | … |

Замечаем, что если номер $n$ делится на 3 без остатка, то первый элемент пары равен 0; если номер $n$ делится на 3 с остатком 1, то первый элемент пары равен –2; если номер $n$ делится на 3 с остатком 2, то первый элемент пары равен -1. Поэтому способ нумерации может быть задан следующим образом:

$$z_n=\begin{cases}(0,4k-1), & \textit{если } n=3k,\\ (-2,4k-1), & \textit{если } n=3k-2,\\ (-1,4k-1), & \textit{если } n=3k-1.\end{cases}\qquad k\in N,$$

и множество $A\times B$ счетно, т.е. имеет мощность $\aleph_0$.

*Задача 2*. Равномощны ли множества $X=(0;+\infty)$ и $Y=\{-1\}\cup[0;1]$?

*Решение*. Покажем, что множества равномощны по теореме Кантора-Бернштейна, т.е. покажем, что найдется $X_1 \subseteq X$ такое, что $X_1 \sim Y$, и найдется $Y_1 \subseteq Y$ такое, что $Y_1 \sim X$.

Выберем в качестве $X_1$ множество $\{1\} \cup [3;4]$ и установим биекцию $f : X_1 \to Y$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } x = 1; \\ x - 3, \text{если } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Множества $X_1$ и $Y$ равномощны.

Пусть $Y_1 = (0;1) \subseteq Y$. Установим биекцию $g : Y_1 \to X$ по закону $g(x) = \log_{0,5} x$. Множества $Y_1$ и $X$ равномощны. По теореме Кантора-Бернштейна $|X| = |Y|$.

### *1.4.10. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Является ли биекцией отображение $f(x) = x^2$, заданное на отрезке [-1;1]? А заданное на [0;1]?

2. Являются ли равномощными множества $X = [0;1]$ и $Y = [-2;0]$?

3. Являются ли равномощными множество $X = \{1, 2\}$ и множество корней квадратного уравнения $x^2 + x + 4 = 0$?

4. Сформулируйте теорему Кантора-Бернштейна.

5. Покажите, пользуясь теоремой Кантора-Бернштейна, что множества $X = [0;1]$ и $Y = [0;3] \cup [4;5]$ равномощны.

6. Даны множества $X = \{2, 5, 7\}$ и $Y = \{3, 6, 8\}$. Чему равно $|X \cup Y|$?

7. Впишите ответ:

   Если $X = \{2, 5, 7\}$, $Y = \{3, 5, 8\}$, то $|X \cup Y| =$ _________ .

8. Пусть $X = \{2, 4\}$. Тогда $|$B($X$)$|$=______, B($X$)={_______________}.

9. Сколько подмножеств имеет множество $X = \{1, 3, 5, 7\}$?

10. Какое множество называется счетным?

11. Покажите, что множество целых чисел **Z** счетно.

12. Мощность счетного множества обозначается _____ .

13. Сформулируйте свойства счетных множеств.

14. Множество $X$ – все натуральные числа, делящиеся на 3; множество $Y$ – натуральные числа, делящиеся на 4. Какова мощность множества $X \cup Y$ ?

### *1.4.11. Задачи для самоподготовки*

Конечные и счетные множества.

Дано конечное множество *A*, заданное перечислением элементов, и счетное множество *B*, заданное характеристическим свойством. Определить мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$ .

Решить задачу для следующих пар множеств *A* и *B*:

1. $A = \{-1, 0, 1\}$ и $B = \{3n - 2 | \ n \in \mathrm{N}\}$
2. $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3n - 1 | \ n \in \mathrm{N}\}$
3. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и $B = \{4n - 2 | \ n \in \mathrm{N}\}$
4. $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4n - 3 | \ n \in \mathrm{N}\}$
5. $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{5n - 4 | \ n \in \mathrm{N}\}$
6. $A = \{-1, 0, 2\}$ и $B = \{3n - 1 | \ n \in \mathrm{N}\}$
7. $A = \{0, 2, 4\}$ и $B = \{4n | \ n \in \mathrm{N}\}$
8. $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{5n - 3 | \ n \in \mathrm{N}\}$
9. $A = \{1, 2, 4, 6\}$ и $B = \{n^2 | \ n \in \mathrm{N}\}$
10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{n^2 - 1 | \ n \in \mathrm{N}\}$

Несчетные множества

Даны два множества. Определить, равномощны ли они.

1. $X = [-2;0]$ и $Y = (1;5)$ ?
2. $X = [-3;1]$ и $Y = (0;+\infty)$

3. $X=(1;3)$ и $Y=[-1;2]$

4. $X=(-\infty;-1)$ и $Y=[2;3]$?

5. $X=(0;7)$ и $Y=[5;10]$

6. $X=[-2;2]$ и $Y=[1;+\infty)$

7. $X=(-\infty;+1)$ и $Y=[2;5)$

8. $X=[3;7]$ и $Y=(-1;23)$?

9. $X=[2;9]$ и $Y=(0;+\infty)$

10. $X=(-3;+\infty)$ и $Y=[2;4]$

# 2. КОМБИНАТОРИКА. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП

## 2.1. Комбинаторика

### *2.1.1. Задачи комбинаторики*

Комбинаторика решает для конечных множеств задачи следующего типа:

а) выяснить, сколько существует элементов, обладающих заданным свойством;

б) составить алгоритм, перечисляющий все элементы с заданным свойством;

в) отобрать наилучший по некоторому признаку среди перечисленных элементов.

Мы будем заниматься только задачами первого типа. При этом будет идти речь об отборе $r$ элементов с заданным свойством из конечного множества $X$, состоящего из $n$ элементов. Результат такого отбора будем называть *выборкой*. Нас будет интересовать вопрос о числе выборок заданного типа.

### *2.1.2. Типы выборок*

Выборки делятся на типы по двум признакам: а) важен ли порядок отбора элементов; б) есть ли среди отобранных элементов одинаковые. Будем обозначать $n$ – количество элементов в исходном множестве $X$, $r$ – количество элементов в выборке.

Упорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***размещением*** из $n$ элементов по $r$. Количество размещений обозначается $A_n^r$ (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Типы выборок

| | Повторений элементов нет | Повторения элементов есть |
|---|---|---|
| Порядок важен | $A_n^r$ размещения | $\overline{A}_n^r$ размещения с повторениями |
| Порядок не важен | $C_n^r$ сочетания | $\overline{C}_n^r$ сочетания с повторениями |

*Пример*. Определяя трех победителей олимпиады среди 20 участников, мы составляем размещения из 20 элементов по 3, т.к. порядок в этом списке важен (первое, второе, третье место), и ни одна фамилия не может появиться в нем дважды.

Упорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***размещением с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{A}_n^r$.

*Пример*. Составляя всевозможные четырехзначные телефонные номера из десяти цифр, мы получаем размещения с повторениями из 10 по 4, т.к. в телефонном номере могут встретиться одинаковые цифры, порядок записи цифр важен.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***сочетанием*** из *n* элементов по *r*. Количество сочетаний обозначается $C_n^r$.

*Пример*. Из восьми человек нужно выбрать троих, чтобы вручить им лопаты для уборки снега. Здесь порядок отбора не важен, и одному человеку вручить две лопаты не удастся – имеем сочетание из восьми по три.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***сочетанием с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{C}_n^r$.

*Пример*. С трех различных негативов хотим напечатать пять фотографий. Здесь порядок печати не важен, а в полученном наборе обязательно будут одинаковые фотографии – это сочетания с повторениями из трех элементов по пять.

### *2.1.3. Основные правила комбинаторики*

В 1.4.6 мы доказывали теоремы о свойствах конечных множеств. Именно они, лишь в другой формулировке, используются при выводе формул комбинаторики как основные правила.

***Правило суммы***. Если элемент *a* может быть выбран *m* способами, а элемент *b другими k* способами, то выбор одного из этих элементов – *a* или *b* может быть сделан *m*+*k* способами.

*Пример*. На конюшне четыре лошади и два пони. Сколько возможностей выбрать себе скакуна? Здесь используем правило суммы: выбираем один элемент из двух множеств (лошадь или пони) $4+2=6$ способами.

***Правило произведения***. Если элемент *a* может быть выбран *m* способами, а после этого элемент *b* выбирается *k* способами, то выбор пары элементов $(a,b)$ в заданном порядке может быть произведен $m \cdot k$ способами.

*Пример*. Пару лыж можно выбрать шестью способами, пару ботинок – тремя. Сколькими способами можно выбрать лыжи с ботинками? Здесь выбираем пару элементов (лыжи, ботинки) – всего $6 \cdot 3 = 18$ способов.

***Правило включения-исключения***. Если свойством *S* обладает *m* элементов, а свойством *P* обладает *k* элементов, то свойством *S* или *P* обладает

$m+k-l$ элементов, где $l$ – количество элементов, обладающих одновременно и свойством *S*, и свойством *P*.

*Пример*. На полке стоят банки с компотом из яблок и груш. В десяти банках есть яблоки, в шести – груши, в трех – и яблоки, и груши. Сколько всего банок на полке? Здесь $m=10, k=6, l=3$, т.е. всего на полке $m+k-l=10+6-3=13$ банок.

### *2.1.4. Размещения с повторениями*

*Задача*. Определить количество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ длины *r*, которые можно составить из элементов множества *X* ($|X|=n$), если выбор каждого элемента $x_i, i=1,2,\ldots,r$, производится из всего множества *X*.

Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – это элемент декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X = X^r$, состоящего из *r* одинаковых множителей *X*. По правилу произведения количество элементов множества $X^r$ равно $\left|X^r\right| = |X|^r = n^r$. Мы вывели формулу $\overline{A}_n^r = n^r$.

*Пример*. Сколько четырехзначных телефонных номеров можно составить, если использовать все десять цифр?

Здесь $n=10, r=4$, и количество телефонных номеров равно

$\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$

### *2.1.5. Размещения без повторений*

*Задача*. Сколько упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ можно составить из *n* элементов множества *X*, если все элементы набора различны?

Первый элемент $x_1$ можно выбрать *n* способами. Если первый элемент уже выбран, то второй элемент $x_2$ можно выбрать лишь $n-1$ способами, а если уже выбран $r-1$ элемент $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, то элемент $x_r$ можно выбрать

$n-(r-1)=n-r+1$ способами (повторение уже выбранного элемента не допускается). По правилу произведения получаем

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1).$$

Эта формула записывается иначе с использованием обозначения $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Так как

$$A_n^r\cdot(n-r)! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!,$$

то

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

*Пример*. Сколько может быть различных списков победителей олимпиады (первое, второе, третье место), если участвовало 20 человек?

Здесь $n=20, r=3$, искомым является число

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840.$$

### *2.1.6. Перестановки без повторений*

Рассмотрим частный случай размещения без повторений: если $n=r$, то в размещении участвуют все элементы множества *X*, т.е. выборки имеют одинаковый состав и отличаются друг от друга только порядком элементов. Такие выборки называются ***перестановками***. Количество перестановок из *n* элементов обозначают $P_n$:

$$P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

*Пример.* Сколькими способами можно выстроить очередь в кассу, если хотят получить зарплату шесть человек?

$$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6 = 720.$$

### *2.1.7. Перестановки с повторениями*

Пусть множество $X$ состоит из $k$ различных элементов: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. ***Перестановкой с повторениями*** состава $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ будем называть упорядоченный набор длины $n = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, в котором элемент $x_i$ встречается $r_i$ раз $(i = 1, 2, \dots, k)$. Количество таких перестановок обозначается $P_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$.

*Пример*. Из букв $\{a, b, c\}$ запишем перестановку с повторением состава $(2, 2, 1)$. Ее длина $n = 2 + 2 + 1 = 5$, причем буква $a$ входит 2 раза, $b$ – 2 раза, $c$ – один раз. Такой перестановкой будет, например, $(a, b, a, b, c)$ или $(b, c, a, a, b)$.

Выведем формулу количества перестановок с повторениями. Занумеруем все одинаковые элементы, входящие в перестановку, различными индексами, т.е. вместо перестановки $(a, b, a, b, c)$ получим $(a_1, b_1, a_2, b_2, c)$. Теперь все элементы перестановки различны, а количество таких перестановок равно $n! = (r_1 + r_2 + \dots + r_k)!$. Первый элемент встречается в выборке $r_1$ раз. Уберем индексы у первого элемента (в нашем примере получим перестановку $(a, b_1, a, b_2, c)$), при этом число различных перестановок уменьшится в $r_1!$ раз, т.к. при изменении порядка одинаковых элементов наша выборка не изменится. Уберем индексы у второго элемента – число перестановок уменьшится в $r_2!$ раз. И так далее, до элемента с номером $k$ – число перестановок уменьшится в $r_k!$ раз. Получим формулу

$$P_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

*Пример*. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова “передача” ?

В этом слове буквы “е” и “а” встречаются два раза, остальные по одному разу. Речь идет о перестановке с повторением состава $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$ длины $n = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$. Количество таких перестановок равно

$$P_8(2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 7! \cdot 2 = 10080 .$$

### *2.1.8. Сочетания*

Задача. Сколько различных множеств из $r$ элементов можно составить из множества, содержащего $n$ элементов?

Будем составлять вначале упорядоченные наборы по $r$ элементов в каждом. Количество таких наборов (это размещения из $n$ элементов по $r$) равно $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$. Теперь учитываем, что порядок записи элементов нам безразличен. При этом из $r!$ различных размещений, отличающихся только порядком элементов, получим одно сочетание. Например, два различных размещения $(a,b)$ и $(b,a)$ из двух элементов соответствуют одному сочетанию $\{a,b\}$. Таким образом, число сочетаний $C_n^r$ в $r!$ раз меньше числа размещений $A_n^r$:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

*Пример*. Количество способов, которыми мы можем выбрать из восьми дворников троих равно

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56.$$

### *2.1.9. Сочетания с повторениями*

Задача. Найти количество $\overline{C}_n^r$ сочетаний с повторениями из $n$ предметов по $r$.

Рассмотрим вывод формулы на примере с фотографиями (см. 2.1.2). Имеется $n$ типов предметов ($n=3$ негатива). Нужно составить набор из $r$ предметов ($r=5$ фотографий). Наборы различаются своим составом, а не порядком элементов. Например, разными будут наборы состава $(3,1,1)$ и $(1,0,4)$ – один содержит три фотографии с первого негатива и по одной со второго и с третьего, а другой – одну с первого и четыре с третьего. Разложим эти наборы на столе, разделяя фотографии разного типа карандашами. Карандашей нам понадобится $n-1=3-1=2$, а фотографий $r=5$. Мы будем получать различные сочетания с повторениями, переставляя между собой эти $(n-1)+r$ предметов, т.е. $\overline{C}_n^r = P_{n-1+r}(n-1,r)$ - число сочетаний с повторениями из $n$ предметов по $r$ равно числу перестановок с повторениями длины $n-1+r$ состава $(n-1,r)$. В нашем примере

$$\overline{C}_3^5 = P_{3-1+5}(3-1,5) = P_7(2,5) = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21.$$

Иначе формулу сочетаний с повторениями можно записать

$$\overline{C}_n^r = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\cdot r!} = C_{n-1+r}^r.$$

### *1.5.10. Решение типовых задачи комбинаторики*

При решении задач комбинаторики рекомендуем выбирать нужную формулу, пользуясь блок-диаграммой (рис. 2.1).

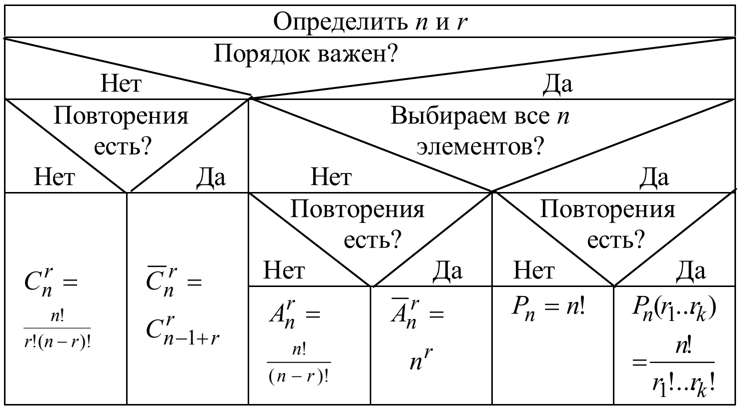


Рис. 2.1. Выбор формулы

*Задача 1.* В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение*. Составим список в порядке: председатель, заместитель, казначей. Выбираем трех из 9 человек, т.е. $n=9, r=3$. Порядок важен? Да, выбираем правую часть блок-диаграммы (рис. 2.1). Следующий вопрос:

выбираем все *n* элементов? Нет. Повторения есть? Нет. Следовательно, наша выборка – размещение без повторений и количество таких выборок

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

*Задача 2*. Сколькими способами 40 человек можно рассадить в три автобуса, если способы различаются только количеством человек в каждом автобусе?

*Решение*. Выстроим 40 человек в очередь и выдадим каждому билет с номером автобуса. Получим выборку, например, такую: $1,1,2,2,3,1,\ldots,2,1$. В этой выборке 40 элементов ($r = 40$), а значений – номеров автобусов – три ($n = 3$). Порядок важен? Чтобы ответить на этот вопрос, поменяем местами двух человек в очереди и посмотрим, изменилась ли выборка. Выборка не изменилась, т.к. количество людей в каждом автобусе осталось прежним. Порядок не важен, поэтому выбираем левую часть блок-диаграммы (рис. 2.1). Повторения есть? Да, в нашей выборке номер автобуса может встречаться несколько раз. Следовательно, выборка является сочетанием с повторениями из $n = 3$ по $r = 40$ элементов:

$$\overline{C}_3^{40} = \frac{(3-1+40)!}{40! \cdot (3-1)!} = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 41 \cdot 21 = 861.$$

### *2.1.11. Бином Ньютона*

В школе изучают формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Бином Ньютона позволяет продолжить этот ряд формул. Раскроем скобки в следующем выражении:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \quad раз}$$

Общий член суммы будет иметь вид $Ca^k b^{n-k}$. Чему равен коэффициент $C$? Он равен количеству способов, которыми можно получить слагаемое $a^k b^{n-k}$ (т.е. количеству способов, которыми можно выбрать $k$ скобок с множителем $a$, а из остальных $n-k$ скобок взять множитель $b$). Например, если $n=5,\ k=2,$ то слагаемое $a^2b^3$ можем получить, выбрав множитель $a$ из первой и пятой скобки. Каков тип выборки? Порядок перечисления не важен (выбираем сначала первую, затем пятую скобки, или, наоборот, сначала пятую, затем первую – безразлично), повторяющихся элементов (одинаковых номеров скобок) в выборке нет. Это сочетание без повторений. Количество таких выборок равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, формула бинома для произвольного натурального $n$ имеет вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

или

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} .$$

*Пример*. При $n=4$ получим формулу

$$(a+b)^4 = C_4^0 b^4 + C_4^1 ab^3 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^3 b + C_4^4 a^4 =$$
$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4,$$

т.к. $C_4^0 = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = 1;\quad C_4^1 = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = 4;\quad C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6;\ \ldots$

Проверьте правильность формулы, перемножив $(a+b)^3$ на $(a+b)$.

Строгое доказательство формулы бинома Ньютона проводится методом математической индукции.

### *2.1.12. Свойства биномиальных коэффициентов*

Биномиальными коэффициентами являются величины

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

которые выражают число сочетаний из $n$ элементов по $k$. Эти величины обладают следующими свойствами.

***Свойство симметрии***.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В формуле бинома это означает, что коэффициенты, стоящие на одинаковых местах от левого и правого концов формулы, равны, например: $C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15.$

Действительно, $C_n^k$ - это количество подмножеств, содержащих $k$ элементов, множества, содержащего $n$ элементов. А $C_n^{n-k}$ - количество дополнительных к ним подмножеств. Сколько подмножеств, столько и дополнений.

***Свойство Паскаля***.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число $C_n^k$ - это количество подмножеств из $k$ элементов множества $X$. Разделим все подмножества на два класса:

1) подмножества, не содержащие элемент $x_1$, - их будет $C_{n-1}^k$;

2) подмножества, содержащие элемент $x_1$, - их будет $C_{n-1}^{k-1}$.

Т.к. эти классы не пересекаются, то по правилу суммы количество всех $k$-элементных подмножеств множества $X$ будет равно $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

На этом свойстве основано построение треугольника Паскаля (рис. 2.2), в $n$-ой строке которого стоят коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mid n=0 \mid$ | | | | | 1 | | | | |
| $\mid n=1 \mid$ | | | | 1 | | 1 | | | |
| $\mid n=2 \mid$ | | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| $\mid n=3 \mid$ | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| $\mid n=4 \mid$ | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |
| $\mid \dots \mid$ | ... | | ... | | ... | | ... | | ... |

Рис. 2.2. Треугольник Паскаля

***Свойство суммы*.**

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Подставим в формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

значения $a = 1,\ b = 1$. Получим

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Заметим, что с точки зрения теории множеств сумма $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ выражает количество всех подмножеств *n*-элементного множества. По теореме о мощности булеана (см. 1.4.4) это количество равно $2^n$.

***Свойство разности*.**

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Положим в формуле бинома Ньютона $a = 1,\ b = -1$. Получим в левой части $(1-1)^n = 0$, а в правой – биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками, что и доказывает свойство.

Последнее свойство удобнее записать, перенеся все коэффициенты с отрицательными знаками в левую часть формулы:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + \ldots,$$

тогда свойство легко запоминается в словесной формулировке: “ сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна сумме биномиальных коэффициентов с четными номерами”.

<u>*Задача*</u>. Найти член разложения бинома $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^n$, не содержащий *x*, если сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна 512.

*Решение*. По свойству разности сумма биномиальных коэффициентов с четными номерами также равна 512, значит, сумма всех коэффициентов равна 512+512=1024. Но по свойству суммы это число равно $2^n = 2^{10} = 1024$. Поэтому $n = 10$. Запишем общий член разложения бинома и преобразуем его:

$$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^k x^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{n-k} = C_n^k x^{k-4n+4k}, \quad k = 0,1,\ldots,n;$$

при $n = 10$ получим:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{5k-40}, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Член разложения $T_{k+1}$ не содержит *x*, если $5k - 40 = 0$, т.е. $k = 8$. Итак, девятый член разложения не содержит *x* и равен $T_9 = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!(10-8)!} = 45.$

***Свойство максимума***. Если степень бинома *n* – четное число, то среди биномиальных коэффициентов есть один максимальный при $k = \frac{n}{2}$. Если степень бинома нечетное число, то максимальное значение достигается для двух биномиальных коэффициентов при $k_1 = \frac{n-1}{2}$ и $k_2 = \frac{n+1}{2}$.

Так, при $n = 4$ максимальным является коэффициент $C_4^2 = 6$, а при $n = 3$ максимальное значение равно $C_3^1 = C_3^2 = 3$ (рис. 2.2).

### *2.1.13. Приближенные вычисления с помощью бинома Ньютона*

Положим в формуле бинома Ньютона $b = 1, a = x$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \ldots + x^n.$$

Эту формулу удобно применять для приближенных вычислений при малых значениях $x$ ($|x|<1$).

*Пример 1*. Используя формулу бинома Ньютона, вычислить $(1{,}0018)^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$.

По приведенной выше формуле имеем:

$$1{,}0018^5 = (1+0{,}0018)^5 = 1 + 5\cdot 0{,}0018 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0{,}0018^2 + \ldots + 0{,}0018^5.$$

Оценим третье слагаемое в этой сумме.

$$\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0{,}0018^2 = 10\cdot 0{,}00000324 < 0{,}00004 < 0{,}0001,$$

остальные слагаемые еще меньше. Поэтому все слагаемые, начиная с третьего, можно отбросить. Тогда

$$1{,}0018^5 \approx 1 + 5\cdot 0{,}0018 = 1{,}009.$$

*Пример 2*. Вычислить $4{,}98^4$ с точностью до 0,01.

$$4{,}98^4 = (5-0{,}02)^4 = 5^4\cdot\left(1+\frac{(-0{,}02)}{5}\right)^4 = 5^4\cdot(1+(-0{,}004))^4 =$$
$$5^4\cdot(1 - 4\cdot 0{,}004 + \frac{4\cdot 3}{2}\cdot 0{,}004^2 - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot 0{,}004^3 + 0{,}004^4).$$

Оценим третье слагаемое:

$$\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 0{,}004^2\cdot 5^4 = 10^{-6}\cdot 6\cdot 2^4\cdot 5^4 = 6\cdot 10^{-2} = 0{,}06\,.$$

Оценим четвертое слагаемое:

$$5^4\cdot 4\cdot 4^3\cdot 10^{-9} = 5^4\cdot 2^4\cdot 4^2\cdot 10^{-9} = 10^4\cdot 16\cdot 10^{-9} = 16\cdot 10^{-5} =$$
$$= 0{,}00016 < 0{,}01.$$

Значит все слагаемые, начиная с четвертого, можно отбросить. Получим

$$4{,}98^4 = 5^4\cdot(1 - 0{,}016 + 0{,}000096) = 625\cdot 0{,}984096 = 615{,}06.$$

### *2.1.14. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов важен, является ________________________ .

2. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов безразличен, является __________________________ .

3. Количество размещений с повторениями из *n* элементов по *r* элементов определяется по формуле

___________ = __________________________ .

4. Количество сочетаний из *n* элементов по *r* элементов определяется по формуле

_____________ = __________________________ .

5. Сформулируйте основные правила комбинаторики.

6. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для письма, если имеется 5 конвертов и 4 марки?

7. Сколько пятизначных номеров можно составить из девяти цифр {1,2,3,4,5,6,7,8,9}?

8. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (все полосы горизонтальные), если имеются ткани пяти различных цветов?

9. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 7 футбольных команд, если известно, что все команды набрали различное количество очков?

10. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек, если имеется 7 бегунов?

11. Сколькими способами можно разложить 12 различных предметов по четырем различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по три предмета?

12. Сколькими способами можно разложить 6 одинаковых шаров по четырем различным ящикам?

13. Запишите разложение бинома $(a-b)^5$.

14. Докажите свойство симметрии биномиальных коэффициентов, сравнив формулы для $C_n^k$ и $C_n^{n-k}$.

15. Найдите максимальный числовой коэффициент в разложении бинома $(1+x)^8$.

16. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислите $0{,}082^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$.

### *2.1.15. Задачи для самоподготовки*

П р а в и л а к о м б и н а т о р и к и

1. В корзине лежат серые котята. У трех из них есть рыжие пятнышки, у четырех – белые. Трехцветный котенок только один. Сколько всего котят в корзине, если все они с пятнышками.

2. В избушку Бабы Яги можно попасть по одной из пяти тропинок, а вернуться только по одной из двух. Сколько всего маршрутов для того, чтобы сходить к ней в гости?

3. В буфете три вида воды и два – сока. Сколькими способами можно выбрать один стакан?

4. Все первоклассники пришли в школу с букетами ромашек и астр. В шести из них были астры, в четырех – ромашки; в двух букетах были и те, и другие цветы. Сколько всего было букетов?

5. На рынке продается четыре щенка и пять котят. Сколько всего возможностей выбрать себе четвероногого друга?

6. На обед в кафе можно взять одно из трех мясных блюд или одно из двух рыбных. Сколько всего способов пообедать, если денег хватает только на одну порцию?

7. Поехали как-то три богатыря на поиски противника. А навстречу им два Змея-Горыныча. Сколько у них способов составить одну пару для поединка.

8. В группе 23 человека, каждый из них умеет кататься на коньках или на лыжах; 12 – умеют кататься на коньках, 18 – на лыжах. Сколько человек умеют кататься и на коньках, и на лыжах.

9. В городе Т три программы телевидения и три радио. Сколько возможностей выбрать программу?

10. Для окраски фона можно использовать один из четырех цветов, для окраски текста – один из трех других цветов. Сколько способов написать цветной текст на цветном экране?

Т и п ы о т б о р а

1. На веревке сушатся четыре белых полотенца и три желтых. Сколькими способами их можно разместить, если полотенца одного цвета не различаются между собой?

2. Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв слова “гипотенуза”, равно числу всех перестановок букв, составляющих слово “призма”.

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух белых и двух черных коней? Конь может стоять на любой клетке, одноцветные фигуры неразличимы.

4. Сколько чисел, больших 5000000, можно составить из цифр 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1.

5. В городе N автобусы ходят без кондукторов, и пассажиры пробивают талоны компостером. Сколько различных пробивок можно установить на компостере, если он пробивает отверстия не менее, чем на трех из девяти возможных мест, но не на всех девяти?

6. Требуется покрасить шесть железных гаражей, на каждый из которых расходуется одна банка краски. Сколькими способами можно покрасить гаражи, если есть две банки красной краски, три – зеленой и одна синей?

7. В колоде 32 карты. Сколькими способами можно выбрать пять карт так, чтобы среди них оказались две “двойки” (“двойка” – пара карт одного номинала).

8. Семеро рыбаков отправились на остров на двух лодках. Ночью одна лодка уплыла. Сколькими способами они могут отправить троих в погоню за уплывшей лодкой?

9. Сколькими способами восемь человек можно рассадить за круглым столом так, чтобы два фиксированных лица сидели друг против друга?

10. В магазине продается восемь типов ручек. Сколькими способами можно выбрать себе три ручки?

## Бином Ньютона

1. Решить уравнение $C_n^{n-2}=6$.

2. Сравнить $(C_{99}^{50}\cdot C_{101}^{50})$ и $(C_{100}^{50})$.

3. Сколько решений имеет уравнение $15\le C_y^x\le 20$?

4. Сравнить $(C_{79}^{40}\cdot C_{81}^{40})$ и $(C_{80}^{40})^2$.

5. Вычислить $C_{20}^{16}\cdot C_4^3$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $2{,}005^4$ с точностью до $\varepsilon=0{,}01$.

7. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $5{,}005^5$ с точностью до $\varepsilon=0{,}001$.

8. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $1{,}025^6$ с точностью до $\varepsilon=0{,}001$.

9. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $0{,}088^6$ с точностью до $\varepsilon=0{,}001$.

10. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $4{,}095^5$ с точностью до $\varepsilon=0{,}01$.

## 2.2. Группы подстановок

### *2.2.1. Понятие группы*

Теория групп начала оформляться в качестве самостоятельного раздела математики в конце VIII века. Она дала мощные средства для исследования алгебраических уравнений, геометрических преобразований, а также для решения ряда задач топологии и теории чисел. Специалисты, занимающиеся обработкой информации, используют методы теории групп при кодировании и декодировании информации.

Мы рассмотрим лишь небольшую часть теории групп и некоторые ее приложения. Наша первая задача – выяснить, что же такое группа.

Для этого сначала определим понятие *бинарной алгебраической операции*.

***Бинарная операция*** на множестве – это соответствие, при котором каждой упорядоченной паре элементов данного множества отвечает однозначно определенный элемент того же множества. Так, действие сложения есть бинарная операция на множестве целых чисел; в самом деле, если $r$ и $s$ – любые два целых числа, то $r+s$ тоже является целым числом.

*Определение 1.* Непустое множество $G$ с заданной на нем бинарной алгебраической операцией $\otimes$ называется *группой*, если:

1) операция $\otimes$ ассоциативна;

2) существует единичный элемент $e \in G$ такой, что для каждого $x \in G$ выполняется условие: $x \otimes e = e \otimes x = x$;

3) для каждого $x \in G$ существует обратный элемент $x^{-1} \in G$ такой, что $x^{-1} \otimes x = x \otimes x^{-1} = e$.

Эти три условия, необходимые для того, чтобы множество $G$ с заданной на нем операцией $\otimes$ являлось группой, называются *аксиомами группы*.

*Пример 1.* Рассмотрим в качестве множества $G$ множество всех целых чисел **Z**, а в качестве бинарной операции – сложение.

Проверим для пары (**Z**, +) аксиомы группы.

1) Ассоциативность. Сложение чисел ассоциативно: для любых $a,b,c \in$ **Z**, $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$;

2) Единичный элемент: нуль является единичным элементом для рассматриваемого множества относительно операции сложения, так как для каждого $x \in$ **Z** выполняется условие: $0+x = x+0 = x$;

3) Обратный элемент: для каждого $x \in$ **Z** существует элемент $-x$, такой, что $-x+x = x+(-x) = 0$.

Итак, проверка показывает, что (**Z**, +) – группа.

*Пример 2.* Рассмотрим то же множество **Z**, но теперь с операцией умножения, т.е. рассмотрим пару (**Z**, ·). Проверим аксиомы группы.

1) Ассоциативность. Умножение чисел ассоциативно: для любых $a,b,c \in$ **Z**, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$;

2) Единичный элемент: число 1 является единичным элементом рассматриваемого множества относительно операции умножения, т.е. для каждого $x \in$ **Z** выполняется условие: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;

3) Обратный элемент. Так как аксиома должна выполняться для любого элемента множества **Z**, то попытаемся найти обратный элемент для числа 2, т.е. нужно найти $y \in$ **Z**, такой что $2y = 1$ или $y \cdot 2 = 1$. Такого целого числа не существует, таким образом, множество целых чисел, с заданной на нем операцией умножения, не является группой.

*Определение 2.* Множество $H \subseteq G$ называется *подгруппой* группы *G*, если оно замкнуто относительно операции ⊗, $e \in H$, и для каждого $x \in H$ обратный элемент $x^{-1} \in H$.

### *2.2.2. Группа подстановок*

Пусть множество *X* состоит из *n* элементов $x_1, x_2, ..., x_n$, расположенных в произвольном, но фиксированном порядке.

Биекция $\varphi : X \to X$ называется *подстановкой.*

В случаях, когда природа элементов не имеет значения, удобно обращать внимание только на индексы и считать, что мы имеем дело с множеством $A=\{1,2,\dots,n\}\sim X$. Следовательно,

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}.$$

Обозначим $S_n$ - множество всех подстановок на $A$. Очевидно, что $|S_n|=P_n=n!$.

На множестве $S_n$ будем рассматривать операцию перемножения (композиции) подстановок $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

$(\varphi_1\circ\varphi_2)(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$ для любого $x\in A$.

Эта операция обладает свойствами:

1) $(\varphi_1\circ\varphi_2)\circ\varphi_3=\varphi_1\circ(\varphi_2\circ\varphi_3)$ - выполняется свойство ассоциативности;

2) существует подстановка $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}\in S_n$, для которой $e\circ\varphi=\varphi\circ e=\varphi$ для каждого $\varphi\in S_n$ - выполняется аксиома существования единичного элемента;

3) для любого $\varphi\in S_n$ существует $\varphi^{-1}\in S_n$ такое, что $\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=e$ - выполняется аксиома существования обратного элемента.

Следовательно, множество $S_n$ образует группу относительно операции перемножения перестановок. Отметим, что эта операция не является коммутативной, то есть $\varphi\circ\psi\neq\psi\circ\varphi$, например,

$$\varphi\circ\psi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\psi\circ\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольную подстановку $\pi\in S_n$. Элемент $x\in A$ такой, что $\pi(x)=x$ будем называть стационарным относительно подстановки $\pi$. Пусть $x_1,x_2,\dots,x_k$ - все нестационарные элементы подстановки $\pi$, причем, $\pi(x_1)=x_2,\pi(x_2)=x_3,\dots,\pi(x_{k-1})=x_k,\pi(x_k)=x_1$, где $k$ – наименьшее из всех возможных. Такая подстановка называется *циклом* длины $k$ и записывается в виде $\pi=(x_1,x_2,\dots,x_k)$.

*Пример 1.* Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Стационарный элемент $x = 2$. Подстановка $\pi$ является циклом длины $k = 3$ и может быть записана в виде $\pi = (1,3,4)$.

*Пример 2.* Пусть $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Подстановка $p$ не является циклом, но может быть представлена в виде композиции двух циклов:

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,5,3) \circ (2,4),$ причем эти циклы являются непересекающимися, т.е. не имеют общих нестационарных элементов.

*Теорема 1.* Любая подстановка $\pi \in S_n$ может быть представлена в виде композиции непересекающихся циклов длины $\geq 2$:

$$\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r \ .$$

Доказательство теоремы дает процедуру построения циклов.

Найдем в $A$ наименьший нестационарный относительно $\pi$ элемент $x_1$, т.е. $\pi(x_1) \neq x_1$ и для каждого $x \in A$ выполняется условие: если $x < x_1$, то $\pi(x) = x$. (Если такого элемента не существует, то $\pi$ является тождественной подстановкой ($\pi = e$) и ее можно рассматривать как пустое произведение циклов).

Будем строить образы элемента $x_1, \pi(x_1), \pi^2(x_1), \ldots$ до тех пор, пока не получим $\pi^k(x_1) = x_1$ при наименьшем из возможных $k$ ($1 < k \leq n$). Тогда подстановка

$$\sigma_1 = \left(x_1, \pi(x_1), \pi^2(x_1), \ldots, \pi^{k-1}(x_1)\right)$$

определяет цикл длины $k$ внутри подстановки $\pi$. Если все нестационарные элементы подстановки $\pi$ содержатся в $\sigma_1$, то $\pi = \sigma_1$. В противном случае найдем $x_2$ - наименьший из нестационарных элементов подстановки $\pi$, не входящий в цикл $\sigma_1$. Строим цикл $\sigma_2 = \left(x_2, \pi(x_2), \pi^2(x_2), \ldots, \pi^{m-1}(x_2)\right)$.

Очевидно, что $\sigma_1$ и $\sigma_2$ - непересекающиеся. Если все нестационарные элементы исчерпаны, то $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2$, в противном случае повторяем процесс, пока каждый нестационарный элемент не войдет в какой-либо цикл. В конечном итоге получим $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$.

*Пример*. Представить в виде композиции циклов подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1; \pi(x_1) = 3; \pi^2(x_1) = \pi(3) = 1$, значит $\sigma_1 = (1,3)$;

$x_2 = 2; \pi(x_2) = 4; \pi^2(x_2) = \pi(4) = 6; \pi^3(x_2) = 2$, значит $\sigma_2 = (2,4,6)$;

$x_5 = 5$ - стационарный элемент.

Следовательно, $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 = (1,3) \circ (2,4,6)$.

*Определение. Порядком* подстановки $\pi$ называется наименьшее натуральное число *p* такое, что $\pi^p = e$.

*Теорема 2.* Порядок подстановки равен наименьшему общему кратному порядков циклов в ее разложении на непересекающиеся циклы.

В качестве упражнения предлагается провести доказательство теоремы самостоятельно.

### *2.2.3. Изоморфизм групп*

Группы $G_1$ и $G_2$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f : G_1 \to G_2$, сохраняющая групповую операцию, т.е.

$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$$

для всех $x, y \in G_1$.

*Пример*. Пусть $G_1$ - группа преобразований правильного треугольника в себя $G_1 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$, где $\varphi_0 = e$ - тождественное преобразо-вание, $\varphi_1$ - поворот вокруг точки *O* на 120°, $\varphi_2$ - поворот вокруг точки *O* на 240°, $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ - отражение относительно осей симметрии I, II, III соответственно (рис. 2.3).

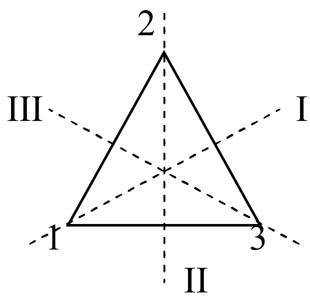



Рис. 2.3. Преобразование правильного треугольника

В качестве группы $G_2$ рассмотрим группу подстановок на множестве $X=\{1,2,3\}$ вершин треугольника $G_2=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5\}$, где

$$\pi_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что биекция $f(\varphi_i)=\pi_i, i=\overline{1,5}$ группы $G_1$ на группу $G_2$ является *изоморфизмом*.

Будем называть порядком конечной группы $G_1$ количество ее элементов $n=|G_1|$.

*Теорема* (Кэли). Всякая конечная группа порядка *n* изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок $S_n$.

*Доказательство.* Пусть $G_1$ произвольная подгруппа порядка *n*. Обозначим $S_n$ группу подстановок на множестве $G_1$. Зафиксируем произвольный элемент $a\in G_1$ и рассмотрим отображение $\varphi_a:G_1\to G_1$ такое, что $\varphi_a(x)=x\circ a$ для любого $x\in G_1$. Очевидно, образы различных элементов *x* и *y*, принадлежащих $G_1$, различны и, следовательно, множество значений $E(\varphi_a)=G_1$. Действительно, предположим, что $\varphi_a(x)=\varphi_a(y)$ при $x\neq y$. Тогда $x\circ a=a\circ x\Rightarrow(x\circ a)\circ a^{-1}= \;=(x\circ a)\circ a^{-1}=(y\circ a)\circ a^{-1}\Rightarrow x\circ(a\circ a^{-1})==y\circ(a\circ a^{-1})\Rightarrow x=y$.

Значит, отображение $\varphi_a$ является подстановкой на множестве $G_1$, причем $\varphi_a\in S_n$, $\varphi_a^{-1}=\varphi_{a^{-1}}\in S_n$, $e=\varphi_{a^{-1}}\circ\varphi_a$, т.е. множество $F=\{\varphi_a|\; a\in G_1\}\subseteq S_n$ образует подгруппу группы $S_n$. При этом

$$\varphi_{a\circ b}(x)=x\circ(a\circ b)=(x\circ a)\circ b=\varphi_a(x)\circ b=\varphi_b(\varphi_a(x)).$$

Следовательно, отображение $f:G_1\to F\subseteq S_n$ такое, что $f(x)=\varphi_x\;\forall x\in G_1$ является изоморфизмом, т.к. $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$.

<u>*Задача*</u>. Найти группу подстановок, изоморфную группе поворотов правильного восьмиугольника на плоскости.

Решение задачи провести самостоятельно.

### *2.2.4. Самосовмещения фигур*

Обширный и очень важный класс разнообразных групп как конечных, так и бесконечных составляют группы “самосовмещений” геометрических фигур. Под *самосовмещением* данной геометрической фигуры $F$ понимают такое перемещение фигуры $F$ (в пространстве или на плоскости), которое переводит $F$ в самое себя, т.е. совмещает фигуру $F$ с самой собой.

Мы уже познакомились с одной из простейших групп самосовмещений, а именно с группой поворотов правильного треугольника на плоскости и показали, что она изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок $S_n$. Аналогичным образом можно построить группы самосовмещений других геометрических фигур и показать их изоморфизм с подгруппой группы $S_n$.

*Задача*. Построить группу симметрий квадрата.

*Решение*. Занумеруем вершины квадрата и оси симметрий (рис. 2.4). Обозначим $O$ – центр симметрии квадрата.

В группу самосовмещений войдет тождественное перемещение – поворот вокруг точки $O$ на 0°; повороты вокруг этой точки на 90°, на 180° и на 270°; повороты относительно четырех осей симметрии. Итого, получаем восемь элементов группы симметрий.

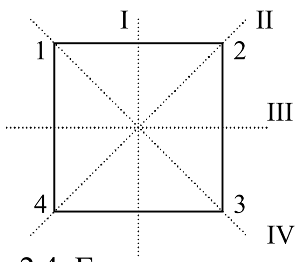


Рис. 2.4. Группа симметрий квадрата

Тождественное перемещение описывает тождественная подстановка $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Вращения на 90°, на 180° и на 270° - подстановки $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ соответственно.

Поворот относительно оси I описывает подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

относительно оси II – подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; оси III - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; оси IV - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, мы получили группу подстановок, изоморфную группе самосовмещений квадрата:

$$S_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

### *2.2.5. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Что такое группа?

2. Дано множество $X = \{-1, 1\}$. Проверить, является ли данное множество группой относительно операции умножения.

3. Что такое подгруппа?

4. Привести пример подстановки, которая является полным циклом.

5. Объяснить процедуру разложения подстановки в произведение независимых циклов.

6. Чему равен порядок подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

7. Какие группы называются изоморфными?

8. Приведите примеры самосовмещений геометрических фигур.

### *2.2.6. Задачи для самоподготовки*

1. Возвести подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в четвертую степень.

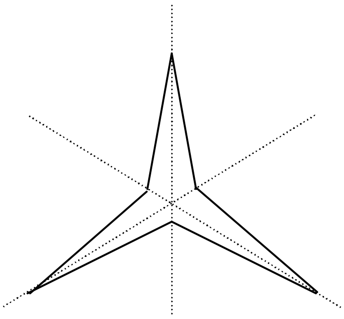
2. Доказать, что подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ является обратной к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

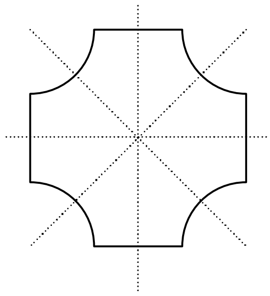
3. Представить подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ в виде композиции независимых циклов.

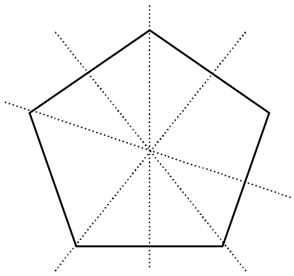
4. Выполнить действия над подстановками:

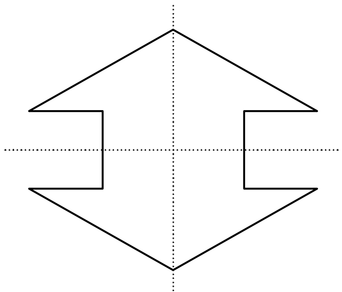
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Построить группы симметрий для фигур, изображенных на рисунках.









# 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

## 3.1. Ориентированные графы

### *3.1.1. Основные понятия*

***Ориентированным графом*** (орграфом) называется упорядоченная пара $(X,\Gamma)$, где $X$ – множество произвольной природы, а $\Gamma \subseteq X \times X$ .

Элементы множества $X$ называются ***вершинами***, а элементы $(x, y)$ множества $\Gamma$ - ***дугами*** орграфа $G_0 = (X,\Gamma)$. Обычно вершины орграфа изображаются точками плоскости, а каждая дуга $(x, y)$ – стрелкой от вершины $x$ к вершине $y$ ($x$ - начало, $y$ – конец дуги).

Говорят, что две вершины орграфа ***смежны***, если они соединены дугой. Две дуги смежны, если у них есть общая вершина. Говорят, что вершина $x$ и дуга $g$ ***инцидентны***, если вершина $x$ является началом или концом дуги $g$. Дуга $g = (x, y)$ называется ***петлей***, если $x = y$ .

Обозначим

$\Gamma(x) = \{y \mid (x, y) \in \Gamma\}$ ;

$\Gamma^{-1}(x) = \{z \mid (z, x) \in \Gamma\}$ ;

$\Gamma^{n}(x) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(x))$ ;

$\Gamma^{-n}(x) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-(n-1)}(x))$ .

Множеством ***достижимости*** вершины $x \in X$ называется множество вершин $X$ :

$D(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^{2}(x) \cup \ldots$ .

Множеством ***контрдостижимости*** вершины $x \in X$ называется множество вершин $X$:

$K(x) = \{x\} \cup \Gamma^{-1}(x) \cup \Gamma^{-2}(x) \cup \ldots$ .

### *3.1.2. Орграфы и бинарные отношения*

Мы рассматриваем орграфы, в которых каждая пара вершин может соединяться не более, чем двумя дугами; причем если дуги две, то они идут в противоположных направлениях. Это графы Бержа – графы представления бинарных отношений. Рассмотрим, как связаны свойства бинарного отношения (см. 1.2.4) с изображением орграфа на плоскости.

*Рефлексивное* бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ представляется орграфом $G_0 = (X, R)$, имеющим петли при каждой вершине, т.к. по определению $\forall x \in X \Rightarrow (x, x) \in R$ (рис. 3.1, *а*).

*Антирефлексивному* отношению *R* соответствует орграф, не имеющий ни одной петли (рис. 3.1, *б*)

Свойство *симметричности* отношения *R* означает, что любые две вершины соединены парой противоположно направленных дуг (рис. 3.1, *в*). В орграфе, представляющем *несимметричное* отношение, нет петель, и любая пара вершин может быть соединена только одной дугой (рис. 3.1, *г*). *Антисимметричность* означает, что любая пара вершин орграфа может быть соединена только одной дугой, но могут быть и петли (рис. 3.1, *д*). Согласно

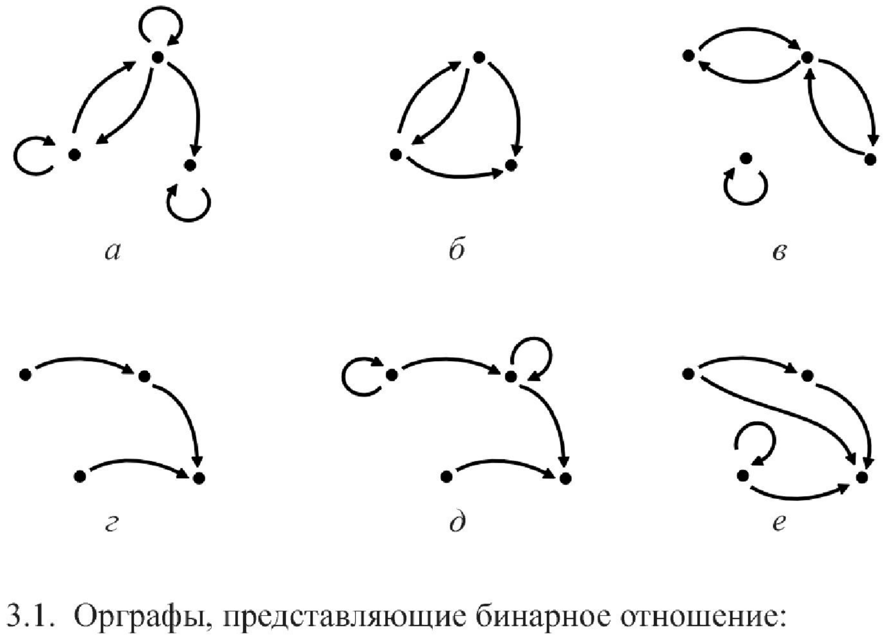


Рис. 3.1. Орграфы, представляющие бинарное отношение:
*а)* рефлексивное; *б)* антирефлексивное; *в)* симметричное;
*г)* несимметричное; *д)* антисимметричное; *е)* транзитивное

определению *транзитивности*, для любой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй. Этому условию отвечают орграфы, изображенные на рис. 3.1, *б*, *г*.

### 3.1.3. Матрицы орграфа

При решении на ЭВМ задач, связанных с орграфами, удобно представлять орграфы в виде матриц. Дадим определения матриц для орграфа $G_0 = (X, \Gamma)$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$.

***Матрицей смежности*** орграфа $G_0$ называется матрица $A$, имеющая $n$ строк и $n$ столбцов, элемент которой, стоящий на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца, равен

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \in \Gamma, \\ 0, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \notin \Gamma, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

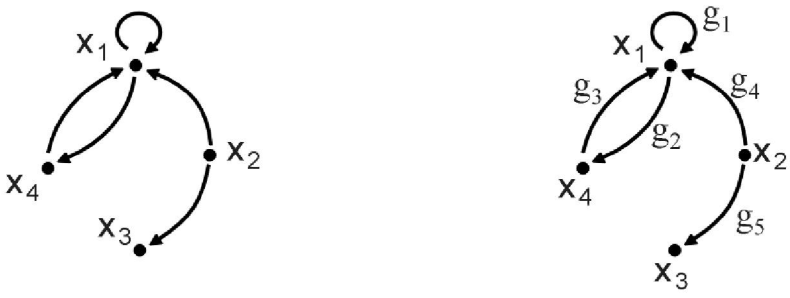
Матрица смежности не сохраняет информацию о нумерации дуг орграфа.

***Матрицей инцидентности*** орграфа $G_0$ называется матрица $B$, имеющая $n$ строк и $m$ столбцов, элемент которой, стоящий на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца, равен

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если вершина } x_i - \textit{начало дуги } g_j, \\ -1, & \textit{если вершина } x_i - \textit{конец дуги } g_j, \\ 2, & \textit{если при вершине } x_i \textit{ есть петля } g_j, \\ 0, & \textit{если вершина } x_i \textit{ и дуга } g_j \textit{ неинцидентны}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

### *3.1.4. Решение типовой задачи по теме «Ориентированные графы»*

*Задача*. Дан ориентированный граф $G_0 = (X, R)$ (рис. 3.2, *а*). Найти




*а* *б*

Рис. 3.2. Орграф $G_0$: *а)* данный по условию задачи; *б)* с занумерованными дугами

множество достижимости и множество контрдостижимости вершины $x_2$. Выяснить, какими свойствами обладает бинарное отношение *R*. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности орграфа $G_0$.

*Решение*. Будем строить множество достижимости поэтапно, включая в него вершины, <u>в</u> которые можно попасть из вершины $x_2$, пройдя по одной, двум, трем и так далее, дугам орграфа, до тех пор, пока множество не перестанет меняться.

<u>Шаг 0</u>. $D_0 := \{x_2\}$.

<u>Шаг 1</u>. $R(x_2) = \{x_1, x_3\}, D_1 = D_0 \cup R(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

<u>Шаг 2</u>. $R^2(x_2) = R(R(x_2)) = R(x_1) \cup R(x_3) = \{x_1, x_4\} \cup \varnothing = \{x_1, x_4\}$.

$$D_2 = D_1 \cup R^2(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Множество $D_2$ содержит все вершины орграфа, поэтому процесс построения множества достижимости окончен:

$D(x_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Аналогично строится множество контрдостижимости, но теперь мы ищем вершины, <u>из </u>которых можно попасть в вершину $x_2$.

<u>Шаг 0</u>. $K_0 := \{x_2\}$.

<u>Шаг 1</u>. $R^{-1}(x_2) = \varnothing, K_1 = K_0 \cup \varnothing = K_0$.

Дальнейшее изменение множества невозможно, поэтому $K(x_2) = \{x_2\}$.

Выясним, какими свойствами обладает отношение $R$. Отношение не является рефлексивным (не при всех вершинах есть петли) и не является антирефлексивным (есть петля при вершине $x_2$). Отношение не является симметричным (пара вершин $(x_2, x_3)$ соединена только одной дугой), не является несимметричным (вершины $x_1$ и $x_4$ соединены парой дуг), не является антисимметричным ($(x_2, x_4) \in R$ и $(x_4, x_2) \in R$, но $x_2 \neq x_4$). Отношение не является транзитивным ($(x_2, x_1) \in R$ и $(x_1, x_4) \in R$, но $(x_2, x_4) \notin R$).

Матрица смежности орграфа $G_0$ имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Для построения матрицы инцидентности занумеруем дуги орграфа $G_0$ (рис. 3.1, *б*). В этих обозначениях матрица инцидентности имеет вид ($i$-ый столбец матрицы соответствует дуге $g_i, i = 1, 2, \ldots, 5$):

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

### *3.1.5. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Какие вершины орграфа называются смежными?
2. Когда говорят, что вершина $x$ инцидентна дуге $g$?
3. Какая дуга орграфа называется петлей?
4. Что такое множество достижимости вершины $x$?
5. Что такое множество контрдостижимости вершины $x$?

6. Какую особенность имеет орграф рефлексивного отношения?

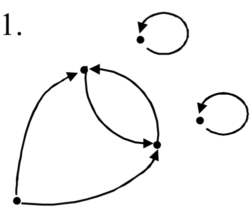
7. Какую особенность имеет орграф симметричного отношения?

8. В орграфе 6 вершин и 8 дуг. Какую размерность имеет его матрица смежности? А матрица инцидентности?

### *3.1.6. Задачи для самоподготовки*

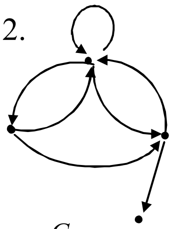
Представьте граф $G_0$ четырьмя различными способами. Запишите бинарное отношение, заданное графом $G_0$. Определите, какими свойствами оно обладает. Запишите матрицы достижимости и взаимодостижимости для графа $G_0$. Выделите сильные компоненты графа.

1.



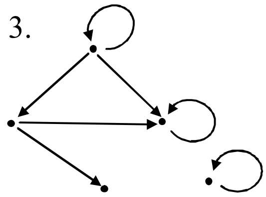
$G_0$

2.



$G_0$

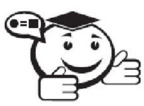
3.



$G_0$

## 3.2. Неориентированные графы

### *3.2.1. Основные термины*



***Неориентированным графом*** (неорграфом) называется упорядоченная пара $G=(X,U)$, где $X$ – множество вершин неорграфа $G$, а $U$ – множество неупорядоченных пар вершин (ребер неорграфа). Любые две вершины неорграфа могут быть соединены не более, чем одним ребром. Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. Вершина *инцидентна* ребру (ребро инцидентно вершине), если она является одним из концов ребра. ***Степень*** $p(x)$ вершины $x$ равна количеству ребер, инцидентных вершине $x$. Сумма степеней всех вершин неорграфа $G=(X,U)$ равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{x\in X} p(x) = 2\cdot|U|.$$

Неорграф называется ***пустым*** (обозначается $O_n$), если все вершины имеют нулевые степени (рис. 3.3, *а*). Неорграф называется ***полным*** (обозначается $K_n$), если все его вершины смежны друг другу (рис. 3.3, *б*).

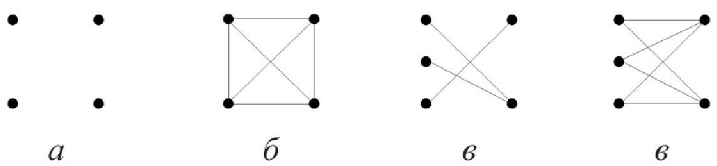
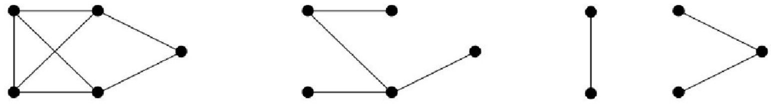



Рис. 3.3. Примеры неорграфов: *а)* пустой $O_4$; *б)* полный $K_4$; *в)* двудольный; *г)* полный двудольный $K_{3,2}$

Неорграф называется ***двудольным***, если множество его вершин можно разбить на два непустых подмножества $X_1$ и $X_2$ так, что смежные вершины принадлежат разным подмножествам (рис. 3.3, *в*). Полный двудольный граф такой, что $|X_1| = s, |X_2| = r$, обозначается $K_{s,r}$ (рис. 3.3, *г*).

В дальнейшем везде вместо термина “неорграф” будем говорить “граф”.

Граф $G_1 = (X_1, U_1)$ называется ***подграфом*** графа $G = (X, U)$, если $X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U$. Подграф $G_1 = (X_1, U_1)$ называется ***остовным*** подграфом графа $G = (X, U)$, если $X_1 = X$. На рис. 3.4, *б*, *в* приведены остовные подграфы графа *G* (рис. 3.4, *а*).



*а* *б* *в*

Рис. 3.4. Граф G (*а*) и его остовные подграфы (*б, в*)

### *3.2.2. Матрицы графа*

Пусть $G = (X, U)$ неорграф, причем $|X_1| = n, |X_2| = m$. Присвоим номера вершинам графа: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

***Матрицей смежности*** графа *G* называется квадратная матрица *A* размерности $n \times n$ (*n* строк, *n* столбцов), элементы которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j, \\ 0, & \text{если } \{x_i, x_j\} \notin U, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матрица смежности неорграфа обладает двумя особенностями: а) на главной диагонали матрицы могут стоять только нули: $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$, т.к. в неорграфе нет петель; б) матрица симметрична относительно главной диагонали: $a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$, т.к. ребро является неупорядоченной парой вершин.

Занумеруем теперь и ребра графа: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

***Матрицей инцидентности*** графа *G* называется прямоугольная матрица *B* размерности $n \times m$ (*n* строк, *m* столбцов), элементы которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ и ребро } u_j \text{ неинцидентны},. \end{cases} \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$$

Каждый столбец матрицы инцидентности соответствует одному ребру графа, поэтому в каждом столбце этой матрицы имеется ровно две единицы (соответствующие двум вершинам – концам данного ребра).

### *3.2.3. Решение типовой задачи по теме «Неориентированные графы»*

<u>*Задача*</u>. Дан неорграф $G=(X,U)$ (рис. 3.5, *а*). Занумеруйте вершины графа и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа *G*. Запишите матрицу смежности графа *G*. Занумеруйте ребра графа и запишите его матрицу инцидентности.

*Решение*. Занумеруем вершины графа арабскими цифрами, а его ребра римскими цифрами в произвольном порядке (рис. 3.5, *б*).

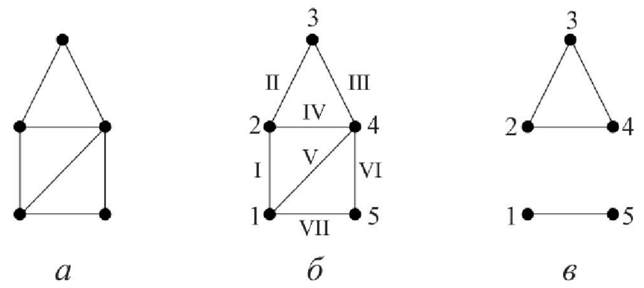



Рис. 3.5. Граф $G=(X,U)$:
*а)* данный по условию задачи;
*б)* с занумерованными вершинами и рёбрами;
*в)* остовный подграф графа $G$

В остовный подграф $G_1=(X_1,U_1)$ графа $G=(X,U)$ включим все вершины $X_1=X$ и любое непустое подмножество ребер, например, $U_1=\{\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV},\mathrm{VII}\}$ рис.3.5, *в*. Перечислим степени вершин графа: $p(1)=3,\quad p(2)=3, p(3)=2, p(4)=4, p(5)=2.$

Матрица смежности *A* (ее размерность $5\times5$) имеет вид:

$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица инцидентности имеет размерность $5\times7$ и равна

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} & \mathrm{VII} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

### *3.2.4. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Перечислены степени всех вершин неорграфа: $2,3,1,2,2$. Сколько ребер имеет этот граф? Нарисуйте такой граф.

2. Какую степень имеет каждая вершина графа $K_5$?

3. Нарисуйте двудольный граф $K_{4,2}$. Какую размерность имеют его матрица смежности и матрица инцидентности?

4. Сколько остовных подграфов можно построить для графа $K_3$?

5. Докажите, что в неорграфе число вершин нечетной степени четно.

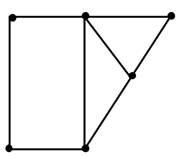
6. Сколько различных подграфов имеет граф $K_3$?

7. Граф, степени всех вершин которого одинаковы и равны числу *l*, называется однородным степени *l*. Нарисуйте однородный степени 2 граф с пятью вершинами. Сколько существует однородных степени 2 графов с шестью вершинами?

### *3.2.5. Задачи для самоподготовки*

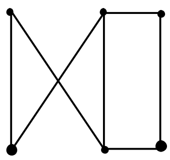
Представьте граф $G_1$ четырьмя различными способами. Запишите степени всех вершин графа.

1.



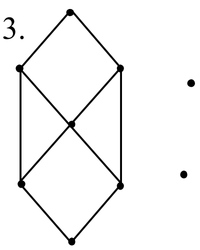
$G_1$

2.



$G_1$

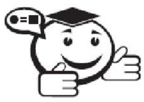
3.



$G_1$

## 3.3. Планарные графы

### *3.3.1. Изоморфизм графов*



Пусть даны неорграфы $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$. Графы $G_1$ и $G_2$ называются ***изоморфными***, если существует биекция $G_1$ на $G_2$, сохраняющая отношение смежности. Это значит, что существует биекция (см. 1.4.1) $\varphi : G_1 \to G_2$ такая, что вершины $x, y \in X_1$ в графе $G_1$ соединены ребром $u \in U_1$ тогда и только тогда, когда в графе $G_2$ их образы $\varphi(x), \varphi(x) \in \varphi(y) \in X_2$ соединены ребром $\varphi(u) \in U_2$. Из определения следует, что не могут быть изоморфными два графа, у которых не совпадает количество вершин или количество ребер.

*Пример*. Графы $G_1$ и $G_2$ (рис. 3.6), изоморфны, т.к. имеют одинаковое количество вершин и ребер ($|X_1| = |X_2| = 4, |U_1| = |U_2| = 6$), и можно биективно отобразить граф $G_1$ на $G_2$, сохранив отношение смежности:

$\varphi(x_i) = y_i, i = \overline{1,4}; \varphi(u_i) = v_i, i = \overline{1,6}.$

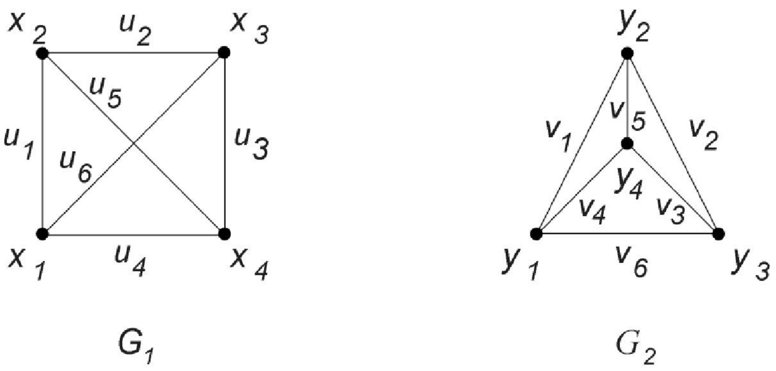
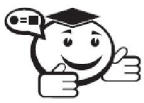



Рис. 3.6. Изоморфные графы $G_1$ и $G_2$

Для изоморфных графов используется обозначение $G_1 \backsim G_2$. Изоморфные графы несут одинаковую информацию и отличаются только обозначениями вершин и ребер. Матрицы смежности изоморфных графов могут быть получены друг из друга одновременными (одинаковыми) перестановками строк и столбцов.

### 3.3.2. Планарность

Часто требуется изобразить граф так, чтобы его ребра не пересекались. Например, при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичной является задача проектирования железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.



Назовем граф ***плоским***, если его вершины являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, будем называть ***планарным***. Так, граф $G_2$ (рис. 3.6) является плоским, а граф $G_1$ – планарным (т.к. изоморфен плоскому графу $G_2$). Существуют и непланарные графы. Один из них появляется в задаче о “трех домах и трех колодцах”: имеются три дома и три колодца (газ, вода и свет); требуется соединить каждый дом с каждым колодцем так, чтобы линии соединения не пересекались. Моделью служит непланарный граф $K_{3,3}$. Также

$K_5$ $K_{3,3}$

Рис. 3.7. Непланарные графы $K_5$ и $K_{3,3}$

непланарным является граф $K_5$ (рис. 3.7).

### 3.3.3. Критерий планарности

Графы $K_5$ и $K_{3,3}$ (рис. 3.7) интересны тем, что они являются эталонами непланарных графов. Все другие непланарные графы имеют подграфы, “подобные” или $K_5$, или $K_{3,3}$. Что значит “подобные”?

*Элементарное стягивание* графа $G=(X,U)$ заключается в следующем: а) удаляем ребро $\{x,y\}$ из $U$; б) заменяем символы $x$ и $y$ в $U$ на новый символ $z$; в) удаляем вершины $x$, $y$ из $X$; г) добавляем $z$ в $X$. Элементарное стягивание графа $G$ означает слияние двух смежных вершин $x$ и $y$ в одну $z$ после удаления ребра между ними.

Граф $G_1$ называется *стягиваемым* к графу $G_2$, если $G_2$ может быть получен из $G_1$ путем последовательных элементарных стягиваний (рис. 3.8).

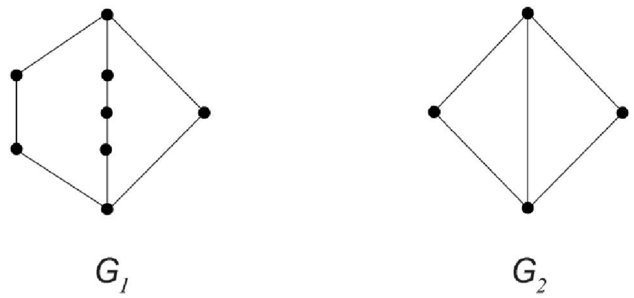



Рис. 3.8 Граф $G_1$ стягиваемый к графу $G_2$

Первый критерий планарности независимо друг от друга доказали русский математик Л.С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский.

<u>*Теорема*</u> Понтрягина - Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к $K_5$ или $K_{3,3}$.

*Пример*. Граф $G_1$(рис. 3.9, *а*) является непланарным, так как его подграф $G_2$ (рис. 3.9, *б*) изоморфен графу $K_{3,3}$ (рис. 3.9, *в*). Вершины графа $G_2$ покрашены в два цвета, чтобы легче было установить изоморфизм $G_2 \backsim K_{3,3}$

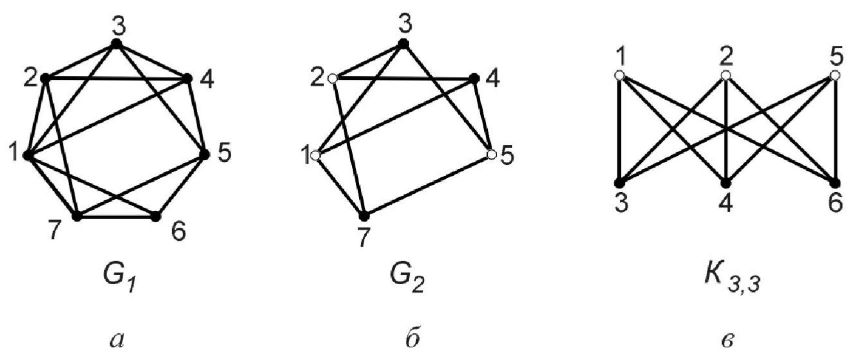



Рис. 3.9. Пример непланарного графа: *а)* граф $G_1$;
*б)* подграф $G_2 \subseteq G_1$; *в)* непланарный граф $K_{3,3}$ ∞ $G$

### *3.3.4. Решение типовой задачи по теме «Изоморфизм графов»*

<u>*Задача*</u>. Даны графы $G_1$ и $G_2$ (рис. 3.10). Показать, что графы изоморфны. Является ли граф $G_1$ планарным?


Рис. 3.10. Графы $G_1$ и $G_2$

*Решение*. Число вершин $n_1$ и число ребер $m_1$ графа $G_1$ совпадает с числом вершин $n_2$ и числом ребер $m_2$ графа $G_2$: $n_1 = n_2 = 6, m_1 = m_2 = 8$. Зададим произвольную нумерацию вершин и ребер графа $G_1$. В графе $G_1$ две вершины $x_1$ и $x_2$ имеют степень $p(x_1) = p(x_2) = 2$. Найдем в графе $G_2$ две вершины, имеющие степень 2 и обозначим их $y_1$ и $y_2$.

Вершина $x_1$ смежна вершинам $x_3$ и $x_4$. Обозначим $y_3$ и $y_4$ вершины графа $G_2$, смежные вершине $y_1$. Соответственно ребрам $u_1$ и $u_2$ графа $G_1$, занумеруем $v_1, v_2$ ребра графа $G_2$, инцидентные вершинам $y_1$ и $y_3$, $y_1$ и $y_4$. Далее занумеруем в графе $G_2$ вершины, смежные с $y_2$, как $y_5, y_6$, а инцидентные им ребра $v_4, v_3$. Вершина $x_4$ в графе $G_1$ смежна вершинам $x_1, x_3, x_5$; обозначим соответствующие ребра $v_2, v_6, v_7$. Ребру $u_5 = \{x_3, x_5\}$ графа $G_1$ сопоставим ребро $v_5 = \{y_3, y_5\}$ графа $G_2$; ребру $u_8 = \{x_5, x_6\}$ – ребро $v_8 = \{y_5, y_6\}$. Построена биекция $\varphi : G_1 \to G_2, \varphi(x_i) = y_i, i = \overline{1,6}$, $\varphi(u_j) = v_j, i = \overline{1,8}$ такая, что смежным вершинам $x_i$ и $x_j$ графа $G_1$ сопос-тавляются смежные вершины $y_i$ и $y_j$. Следовательно, графы $G_1$ и $G_2$ изоморфны.

Для ответа на вопрос о планарности построим плоский граф $G_3$, изоморфный графу $G_1$ (рис. 3.11). Граф $G_1$ является планарным.

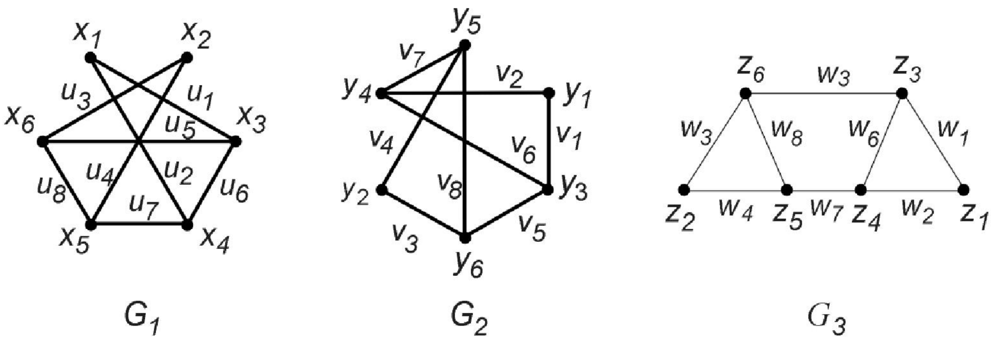



Рис. 3.11. Изоморфные графы $G_1$, $G_2$, $G_3$

### *3.3.5. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Какие графы называются изоморфными?

2. Изоморфны ли графы $K_8$ и $K_{2,4}$?

3. Запишите матрицы смежности изоморфных графов $G_1$ и $G_2$ (рис.3.6).

4. Как связаны между собой матрицы инцидентности двух изоморфных графов?

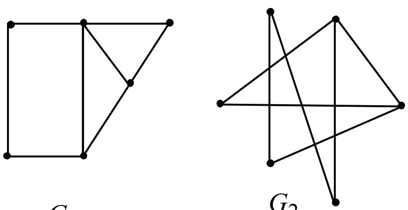
5. Какой граф называется плоским?

6. Какой граф называется планарным?

### *3.3.6. Задачи для самоподготовки*

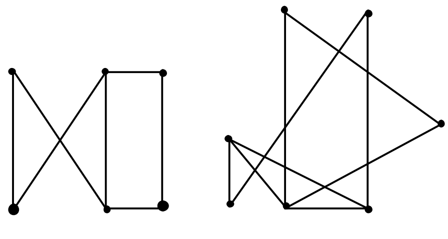
Изоморфны ли графы $G_1$ и $G_2$?

1.



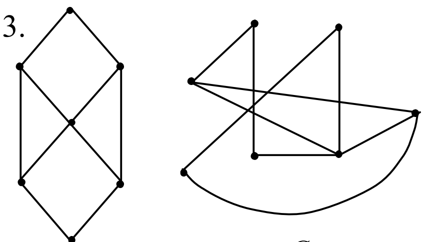
$G_1$ $G_2$

2.



$G_1$ $G_2$

3.

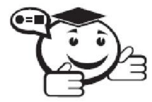


$G_2$

$G_1$

## 3.4. Связность графов

### *3.4.1. Маршруты*



Пусть задан неорграф $G=(X,U)$. Последовательность $x_1u_1x_2u_2x_3\ldots u_kx_{k+1}$ вершин $x_i\in X,\ i=\overline{1,k+1}$, и ребер $u_j\in U,\ \ j=\overline{1,k}$ графа $G$ называется ***маршрутом*** длины *k*, соединяющим вершины $x_1$ и $x_{k+1}$. Вершина $x_1$ называется начальной, а $x_{k+1}$ – конечной вершиной маршрута. Маршрут называется *замкнутым*, если его конечная вершина совпадает с начальной. Незамкнутый маршрут, в котором все ребра различны, называется ***цепью***. Цепь, в которой все вершины различны, называется ***простой*** цепью. Замкнутый маршрут, в котором все ребра различны, называется ***циклом***. Цикл, в котором все вершины (кроме начальной и конечной) различны, называется ***простым***.

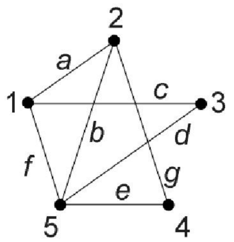



Рис. 3.12. Граф $G_1$

*Пример*. В графе *G* (рис. 3.12) последовательность $5b2a1f5b2c4$ определяет марш-рут длины 5, соединяющий вершину 5 с вершиной 4; $5b2a1d3g5e4$ – цепь длины 5; $5b2c4$ – простую цепь; $5b2c4e5$ – простой цикл.

### *3.4.2. Компоненты связности*

Граф $G=(X,U)$ называется ***связным***, если для любой пары вершин $x,y\in X$ найдется цепь, соединяющая эти вершины. Например, граф $G_1$ (рис. 3.13)

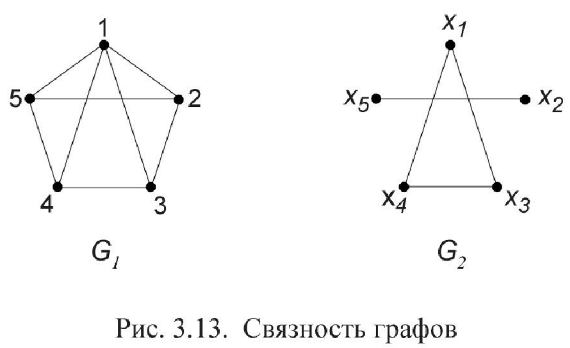



Рис. 3.13. Связность графов

является связным, а граф $G_2$ – нет (вершины $x_1$ и $x_2$ не могут быть соединены цепью).

***Компонентой связности*** графа *G* называется максимальный связный подграф графа *G*. Слово “максимальный ” здесь означает, что добавление любой вершины графа *G* превращает этот граф в несвязный. Так, у графа $G_2$ (рис. 3.13) имеется две компоненты связности: $G'$ – подграф, содержащий вершины $x_5, x_2$ и соединяющее их ребро; $G''$ – вершины $x_1, x_3, x_4$ и соединяющие их ребра. Подграфы $G'$ и $G''$ не имеют общих вершин и ребер, причем $G_2 = G' \cup G''$, т.е. множество компонент связности $\{G', G''\}$ образует разбиение графа $G_2$.

### *3.4.3. Эйлеровы цепи и циклы*

Задача. Дан граф $G = (X, U)$. Требуется построить цикл (цепь), проходящий через все ребра графа *G* ровно по одному разу. Такой цикл (цепь), если он существует, называется ***эйлеровым*** циклом (цепью), а граф *G* – эйлеровым графом. В популярной формулировке эта задача звучит так: заданную плоскую фигуру нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной и той же линии дважды (рис. 3.14).

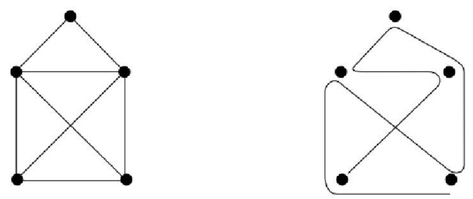


Рис. 3.14. Эйлерова цепь в графе *G*

Теорема 1 (об эйлеровом цикле). Для того, чтобы в графе *G* существовал эйлеров цикл, необходимо и достаточно, чтобы: 1) он был связен; 2) степени всех вершин были четными.

Необходимость. Пусть в графе $G$ существует эйлеров цикл. Тогда граф $G$ связен (любую пару вершин можно соединить цепью – частью эйлерова цикла), и степень каждой вершины четна: так как все ребра эйлерова цикла различны, то с каждым проходом эйлерова цикла через вершину $x$ в этот цикл войдут два новых инцидентных вершине $x$ ребра, следовательно, общее число ребер, инцидентных вершине $x$, четно.

Достаточность докажем индукцией по количеству ребер $m$.

Основание индукции. Проверим справедливость теоремы при $m = m_0 = 3$. Пусть граф $G$ связен и все вершины его имеют четную степень. Тогда граф может быть только таким, как на рисунке 3.15, *а*. Очевидно, что в нем есть эйлеров цикл.

Индукционный переход. Предположим, что теорема справедлива для всех графов с числом ребер $m \le k$. Покажем, что теорема справедлива и для графов с числом ребер $m = k+1: T(m \le k) \Rightarrow T(m = k+1)$.

Пусть $G = (X, U)$ связный граф, все вершины которого имеют четную степень и $|U| = k+1$.

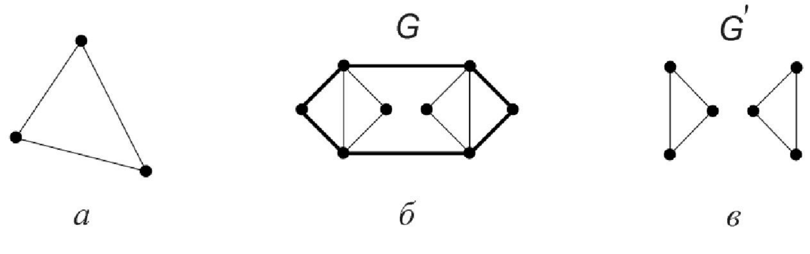



Рис. 3.15. Эйлеровы графы: *а)* эйлеров цикл с числом ребер $m$=3;
*б)* $G$ - связный граф, степени вершин которого четны;
*в)* подграф $G'$ графа $G$

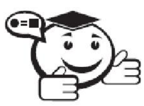
Так как число вершин графа $G$ конечно, то в нем существует цикл $\mu_0$ (на рис. 3.15, *б* выделен жирной линией). Если цикл $\mu_0$ содержит все ребра графа $G$, он является искомым эйлеровым. Если $\mu_0$ содержит не все ребра графа $G$, то построим подграф $G'$ графа $G$, выбросив ребра, содержащиеся в $\mu_0$ (рис. 3.15, *в*). Подграф $G'$ не обязательно связный, но его можно разбить на компоненты связности $G_1, G_2, \ldots, G_p$ (на рис. 3.15, *в* $p = 2$). Каждая компонента связности $G_i,\ i = \overline{1, p}$, является связным графом, все вершины которого имеют четную степень, а число ребер $m_i \le k,\ i = \overline{1, p}$. По индукционному предположению для каждого графа $G_i$ можно построить эйлеров цикл $\mu_i$, $i = \overline{1, p}$. Так как исходный граф *G* связен, то цикл $\mu_0$ имеет общие вершины со всеми циклами $\mu_i$, $i = \overline{1, p}$. Тогда искомым эйлеровым циклом в *G* является объединение циклов $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Индукционный переход доказан.

Следовательно, теорема справедлива для графов с любым числом ребер $m \ge 3$.

*Теорема 2* (об эйлеровой цепи). В графе *G* существует эйлерова цепь тогда и только тогда, когда: 1) граф *G* связен; 2) граф *G* имеет ровно две вершины нечетной степени.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

### *3.4.4. Цикломатическое число*



Пусть в графе $G = (X, U)$ количество вершин $|X| = n, |U| = m$, количество компонент связности равно *k*. ***Цикломатическим числом*** графа *G* называется число $\lambda(G) = k + m - n$.

*Пример*. Определим цикломатическое число для каждого из графов $G_i, i = \overline{1, 4}$ (рис. 3.16).

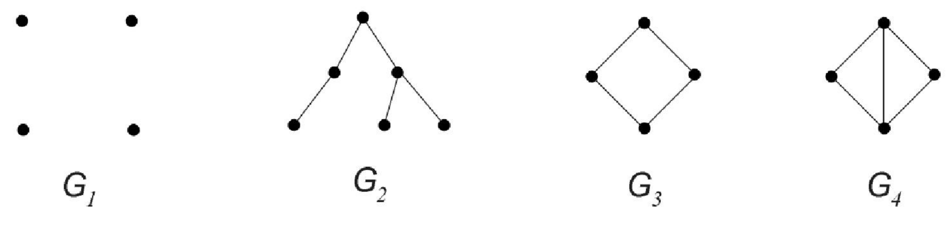



Рис. 3.16. Примеры графов с различными цикломатическими числами

Граф $G_1$ является пустым графом и для него $n=4, m=0, k=4$, поэтому $\lambda(G_1)=4+0-4=0$. Для графа $G_2$ имеем $\lambda(G_2)=1+5-6=0$. Для $G_3$ - $\lambda(G_3)=1+4-4=1$; для $G_4 - \lambda(G_4)=1+5-4=2$.

*Теорема*. Цикломатическое число графа равно нулю тогда и только тогда, когда в графе нет циклов.

Действительно, пусть $\lambda(G)=k+m-n$. Рассмотрим остовный подграф $G_1=(X,U_1)$ графа $G=(X,U)$, выбросив ребро $u_1: U_1=U\setminus\{u_1\}$. Если в графе *G* есть хотя бы один цикл, содержащий ребро $u_1$, то число компонент связности не изменится; если же ни одного такого цикла нет, то число компонент связности увеличится на единицу: $k_1=k+1$. Поэтому $\lambda(G_1)=k_1+\quad+(m-1)-n\geq\lambda(G)$. Будем повторять эти рассуждения, выбрасывая по одному ребру, пока не получим пустой подграф $G_m=O_n$. Для цепочки подграфов $G, G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}, G_m$ выполняются неравенства

$$\lambda(G)\geq\lambda(G_1)\geq\lambda(G_2)\geq\ldots\geq\lambda(G_{m-1})\geq\lambda(G_m),$$

причем $\lambda(G_m)=\lambda(O_n)=n+0-n=0$, и знак равенства сохранится на протяжении всей цепочки тогда и только тогда, когда выбрасываются ребра, не входящие ни в один цикл. Поэтому $\lambda(G)=\lambda(O_n)=0$ тогда и только тогда, когда в графе *G* нет циклов.

### *3.4.5. Решение типовой задачи по теме «Связность графов»*

*Задача*. Для данного неорграфа *G* (рис. 3.17, *а*) определить цикломатическое число. Выяснить, можно ли нарисовать *G*, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды.

*Решение*. Граф *G* является связным, поэтому число компонент связности $k=1$. Число вершин графа $n=6$, число ребер $m=10$. По определению цикломатического числа $\lambda(G)=k+m-n=1+10-6=5.$

Для ответа на второй вопрос определим степени всех вершин графа: $p(1)=4, p(2)=3, p(3)=4, p(4)=3, p(5)=4, p(6)=2.$ Граф связен, и ровно две вершины (вторая и четвертая) имеют нечетную степень. По теореме об эйлеровой цепи в графе существует эйлерова цепь, т.е. его можно нарисовать, не отрывая руки от бумаги. Начальной и конечной вершинами этой цепи будут вершины с нечетной степенью (один из вариантов приведен на рис. 3.17, *б*).

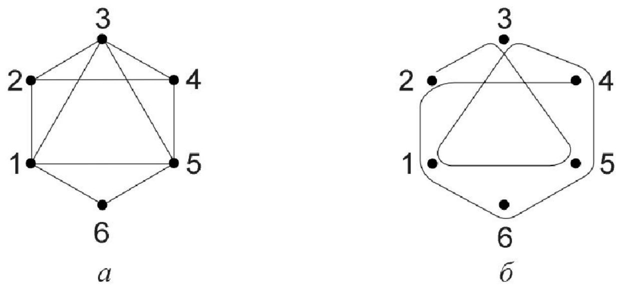



Рис. 3.17. Граф $G$: *а)* данный по условию;
*б)* эйлерова цепь в графе $G$

### *3.4.6. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Нарисуйте граф $K_{3,3}$; постройте в нем цикл длины 4. Можно ли в этом графе построить цикл нечетной длины?

2. Нарисуйте граф, имеющий 6 вершин , 4 ребра, 3 компоненты связности. Чему равно его цикломатическое число?

3. Связный граф задан матрицей смежности:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чему равно его цикломатическое число?

4. Сформулируйте теорему об эйлеровом цикле.

5. Является ли эйлеровым граф $K_5$? А граф $K_6$?

6. Сформулируйте теорему об эйлеровой цепи.

7. Существует ли эйлерова цепь в графе $G$ (рис. 3.12)?

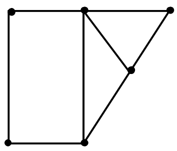
8. Может ли цикломатическое число графа принимать отрицательное значение?

9. Известно, что в графе $G$ есть эйлеров цикл. Может ли его цикломатическое число равняться нулю?

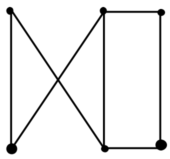
### *3.4.7. Задачи для самоподготовки*

Возможно ли нарисовать граф не отрывая руки от бумаги? Обоснуйте ответ. Если возможно, запишите произвольный эйлеров цикл или цепь. Найдите цикломатическое число графа.

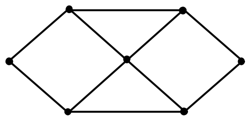
1.



2.



3.



## 3.5. Графы без циклов

### *3.5.1. Дерево и лес*

Связный граф без циклов называется ***деревом***. Несвязный граф без циклов - ***лесом***.

В качестве *корня* дерева может быть рассмотрена любая из его вершин. ***Листом*** дерева будем называть вершину $x$ степени единица: $p(x)=1$. *Ветвь* дерева – любая цепь, соединяющая корень с листом.

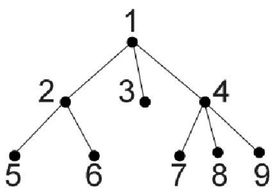



Рис. 3.18. Граф $G$ - дерево

На рис. 3.18 в качестве корня рассматривается вершина 1; листьями являются вершины 3,5,6,7,8,9; ветви – цепи 1-2-5 или 1-4-8 и т.п.

### *3.5.2. Свойства деревьев*

Пусть в графе $G=(X,U)$ $n=|X|$ - количество вершин, $m=|U|$- количество ребер, $k$ – количество компонент связности.

<u>*Свойство 1*</u>. Граф $G$ является деревом тогда и только тогда, когда его цикломатическое число $\lambda(G)=0$ и число компонент связности $k(G)=1$.

Это свойство является переформулировкой определения: дерево – связный граф, значит, $k(G)=1$; дерево – граф без циклов, значит, $\lambda(G)=0$.

<u>*Свойство 2*</u>. Если граф $G$ – дерево, то количество его ребер на единицу меньше количества вершин.

По свойству 1 $\lambda(G)=k+m-n=0$ и $k=1$, отсюда $1+m-n=0$, т.е. $m=n-1$.

<u>*Свойство 3*</u>. Любая пара вершин дерева может быть соединена единственной простой цепью.

Предположим противное. Пусть найдутся вершины $x, y \in X$ для которых нет такой цепи. Тогда граф $G$ не является связным, что противоречит условию ($G$ – дерево).

Предположим теперь, что для некоторой пары вершин $x, y \in X$ существуют две простых цепи, соединяющих $x$ и $y$. Тогда образуется цикл, но это противоречит условию ($G$ – дерево).

Следовательно, для любой пары вершин такая цепь существует и единственна.

<u>*Свойство 4*</u>. Среди связных графов с заданным количеством вершин дерево является максимальным безцикловым графом.

Слово "максимальный" здесь означает, что добавление любого ребра к дереву приводит к появлению цикла. Действительно, соединив любые две несмежные вершины дерева ребром, получим цикл, т.к. по свойству 3 существует цепь, соединяющая эти вершины.

<u>*Свойство 5*</u>. Дерево является минимальным связным графом.

Слово "минимальный" здесь означает, что удаление любого ребра приводит к нарушению связности. Цикломатическое число обладает свойством $\lambda(G) \geq 0$, у дерева $\lambda(G) = k + m - n = 0$. Удалив ребро, получим подграф $G_1 \subseteq G$, для которого $\lambda(G_1) = k_1 + m_1 - n_1 = k_1 + (m-1) - n = 0$, но по свойству 2 $m = n - 1$, отсюда $k_1 + n - 2 - n = 0$ и $k_1 = 2$, т.е. граф $G_1$ несвязный.

### *3.5.3. Каркасы графа*

<u>*Задача*</u>. Шесть городов соединены сетью автодорог (рис. 3.19). Требуется закрыть на ремонт наибольшее количество дорог так, чтобы связь между городами сохранилась.

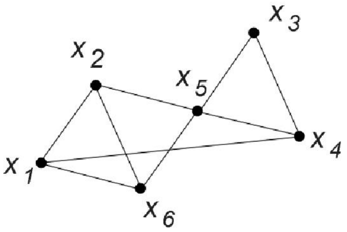



Рис. 3.19. Схема автодорог

В этой задаче имеем связный граф $G=(X,U)$ и требуется построить его остовный связный подграф $G_1=(X,U_1)$ с наименьшим количеством ребер. По свойству 5 (см. 3.5.2) $G_1$ – дерево.

***Каркасом*** графа $G$ называется остовный подграф графа $G$ с тем же числом связности, но без циклов.

Очевидно, что каркас связного графа – дерево, несвязного – лес. Каркас может быть построен не единственным образом. На рис. 3.20 приведены два различных каркаса для схемы автодорог (рис. 3.19).

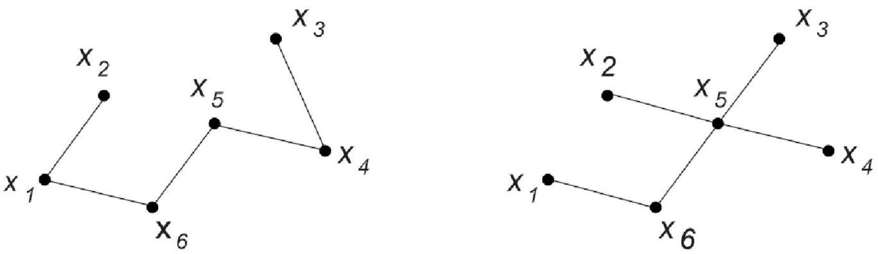



Рис. 3.20. Каркасы графа для схемы автодорог

Сколько ребер нужно удалить, чтобы построить каркас графа?

<u>*Теорема*</u>. Чтобы построить каркас графа, нужно удалить $\lambda(G)$ ребер.

Докажем теорему для связного графа $G=(X,U),\ |X|=n, |U|=m,\ k(G)=1$. Пусть $G_1=(X,U_1)$ – каркас графа $G$. Найдем разность $m(G)-m(G_1)$. Так как $G_1$ – дерево, то $m(G_1)=n(G_1)-1=n-1$. Значит, при построении каркаса удалено $m(G)-m(G_1)=m-n+1=$ $=1+m-n=\lambda(G)$ ребер.

Для несвязного графа теорема доказывается аналогично (строится каркас для каждой компоненты связности).

Для графа на рис. 3.19 $\lambda(G)=1+9-6=4$ – нужно удалить 4 ребра. Поэтому его каркасы (рис. 3.20) содержат $n-4=9-4=5$ ребер.

Какие ребра нужно удалить для построения каркаса? Рассмотрим два метода построения каркаса графа.

### *3.5.4. Обход графа “в ширину”*

Идея метода заключается в следующем. Начинаем обход графа из произвольной вершины, которой присваиваем метку “1”. Вершинам, смежным с помеченной, присвоим метки $2, 3, \ldots, r_1$. Далее нумеруем непомеченные вершины, смежные с 2; затем непомеченные вершины, смежные с 3 и т.д., пока не занумеруем все вершины, смежные с уже помеченными. Если в графе есть непомеченные вершины, то процесс повторяется, пока всем вершинам не будут присвоены метки. Покажем применение этого метода для построения каркаса графа. Дан граф *G* (рис. 3.21, *а*).

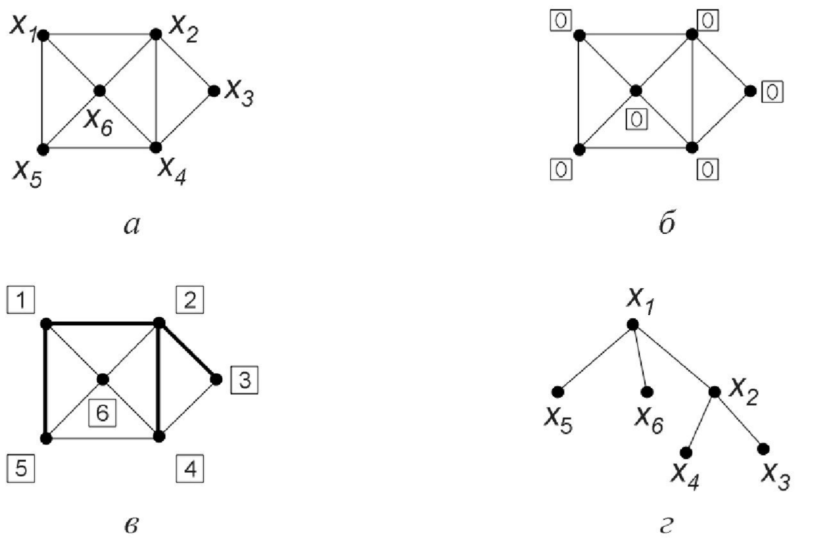



Рис. 3.21. Обход графа *G* "в ширину":
*а)* данный граф; *б)* начальная разметка;
*в)* окончательная разметка; *г)* каркас графа *G*

Присвоим всем его вершинам метки “0”(рис. 3.21, *б*). Начинаем разметку с вершины $x_1$: она получает метку “1”. Вершине $x_1$ смежны вершины $x_2, x_6, x_5$, имеющие метку “0”. Присваиваем им новые метки “2”, “3”, “4” и включаем в каркас соответствующие ребра (выделены жирной линией на рис. 3.21, *в*). Вершина $x_2$ имеет метку “2”, ей смежны вершины $x_3, x_4, x_6$. Но вершина $x_6$ уже имеет метку, большую нуля, поэтому новые метки “5” и “6” получают вершины $x_3$ и $x_4$. Включаем в каркас ребра $\{x_2, x_3\}$ и $\{x_2, x_4\}$. Рассмотрим вершину с меткой “3”. Все вершины, смежные ей, уже имеют метки, большие нуля, поэтому новые ребра к каркасу не добавляем. То же можно сказать и о вершинах с метками “4”, “5”, “6”. Каркас графа *G* приведен на рис. 3.21, *г*.

Обход графа в “ширину” приводит к “разветвленным” деревьям с короткими ветвями.

Если граф несвязный, то разметка проводится для каждой его компоненты связности.

### *3.5.5. Обход графа “в глубину”*

Этот метод приводит к деревьям малоразветвленным, с длинными ветвями.

Продемонстрируем обход “в глубину” для графа *G* (рис. 3.21, *а*). Всем вершинам присвоим метку “0” (рис. 3.21, *б*). Начинаем разметку из вершины $x_1$ с меткой “1”; вершине $x_2$ присваиваем метку “2”, ребро $\{x_1, x_2\}$ включаем в каркас (рис. 3.22, *а*).

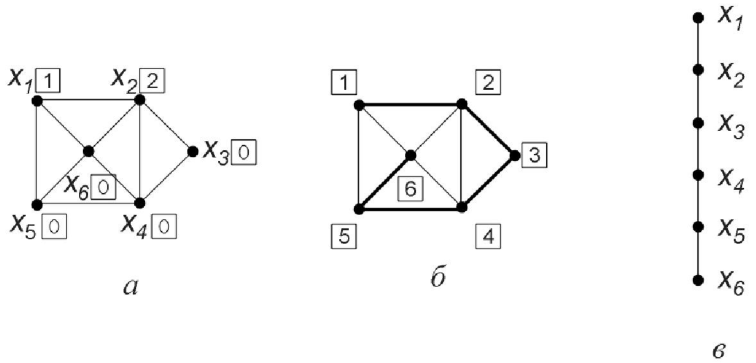



Рис. 3.22. Обход графа *G* "в глубину": *а)* начало разметки; *б)* окончательная разметка; *в)* каркас графа *G*

Далее ищем вершину с нулевой меткой, смежную вершине “2” – присваиваем ей метку “3”, включаем соединяющее их ребро в каркас и так далее, до тех пор, пока все вершины не получат отличные от нуля метки. Каркас графа *G* построен (рис. 3.22, *в*).

### *3.5.6. Решение типовой задачи по теме «Графы без циклов»*

<u>*Задача*</u>. Для данного графа $G$ (рис. 3.23, *а*) выяснить, сколько ребер нужно удалить, чтобы построить его каркас. Построить каркас графа двумя способами (обход “в глубину”, обход “в ширину”), начиная обход из вершины с максимальной степенью.

*Решение*. Согласно теореме из 3.5.3 количество удаляемых ребер при построении каркаса равно цикломатическому числу графа. Для графа $G$ $n = 5, m = 6, k = 1,$ поэтому цикломатическое число $\lambda(G) = k + m - n = \ = 1 + 7 - 5 = 3$, т.е. для построения каркаса нужно удалить 3 ребра графа. Максимальную степень имеет вершина $x_4 : p(x_4) = 4$. Будем строить каркас с помощью обхода “в ширину” из вершины $x_4$ (метка “1”). Метки “2”, “3”, “4”, “5” получат вершины $x_2, x_1, x_3, x_5$. Включаем в каркас ребра, соединяющие эти вершины с вершиной $x_4$, и построение каркаса закончено (рис. 3.23, *б*).

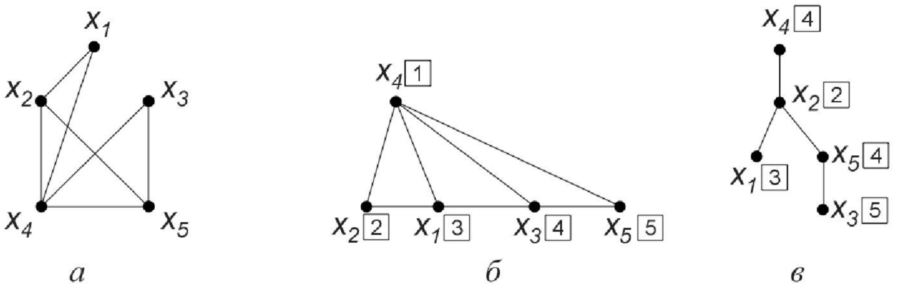



Рис. 3.23. Построение каркаса графа $G$:
*а)* данный граф $G$;
*б)* каркас, построенный обходом "в ширину";
*в)* каркас, построенный обходом "в глубину”

Присвоим вновь метку “1” вершине $x_4$. Будем строить каркас, обходя граф “в глубину”. Метку “2” получит вершина $x_2$ (включаем в каркас ребро $\{x_4, x_2\}$). Метку “3” – вершина $x_1$(включаем ребро $\{x_2, x_1\}$). Все вершины, смежные $x_1$, уже имеют ненулевые метки, поэтому возвращаемся из вершины $x_1$ в вершину $x_2$. Вершина $x_5$ смежна вершине $x_2$ и не имеет метки. Присваиваем ей метку “4” и включаем в каркас ребро $\{x_2, x_5\}$. Следующую метку “5” получает вершина $x_3$, в каркас включаем ребро $\{x_5, x_3\}$. Все вершины имеют ненулевые метки, в каркас включено $m - \lambda(G) = 7 - 3 = 4$ ребра, его построение закончено (рис. 3.23, *в*).

### *3.5.7. Вопросы и упражнения для самопроверки*

1. Какой граф называется деревом?

2. Сколько ребер может быть у дерева с шестью вершинами?

3. Что произойдет с цикломатическим числом дерева, если удалить одно из его ребер?

4. Какое наименьшее количество ребер может иметь связный граф с 16 вершинами?

5. Докажите, что всякое дерево, имеющее хотя бы одно ребро, имеет хотя бы один лист.

6. Что такое каркас графа?

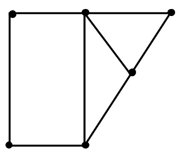
7. Всегда ли каркас графа является деревом?

8. Сколько ребер нужно удалить, чтобы построить каркас графа $K_4$?

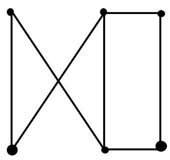
### *3.5.8. Задачи для самоподготовки*

Постройте алгоритмы обхода «в глубину» и «в ширину» для данных графов;

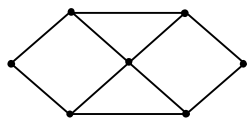
1.



2.



3.



# 4. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ

## 4.1 Основная литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : Учебное пособие для вузов / - 2-е изд. - СПб.; М.; Нижний Новгород: Питер, 2007. - 363с

2. Иванов Б.Н. .Дискретная математика. Алгоритмы и программы : Учебное пособие для вузов / - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. - 288 с

3. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практич. занятий: Уч. пособие для вузов /- СПб.: БХВ-Петербург, 2006. - 396 с

## 4.2 Дополнительная литература

1. Акимов О.Е.. Дискретная математика: логика, группы, графы / - 2-е изд., доп. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. - 376 с

2. Галкина В.А. Дискретная математика: комбинаторная оптимизация на графах: Учеб. пособие / - М. : Гелиос АРВ, 2003. - 231] с.

3. Плотников А.Д. Дискретная математика : Учебное пособие / - 2-е изд., испр. и доп. - М. Новое знание, 2006. - 304 с.

4. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов : Пер. с англ. : Уч. пособие для вузов/ ред. пер. С. А. Кулешов,. - 2-е изд., доп. - М. Техносфера, 2005. - 399с

5. Смыслова З.А. Дискретная математика : учебное пособие / Министерство образования Российской Федерации (М.), Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (Томск), Кафедра автоматизации обработки информации.-Томск:ТМЦДО, 2000. - 116 с.

6. Смыслова З.А., Пермякова Н. В. Дискретная математика : Методические указания для выполнения практических работ для студентов специальности 230102 / Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, . - Томск : [б. и.], 2007. - 28 с. :

7. Пермякова Н. В. Спецглавы математики : учебное пособие / Министерство образования Российской Федерации, ТУСУР. - Томск : ТМЦДО, 2000 - .**Ч. 2** : Теория графов : учебное пособие. - Томск : ТМЦДО, 2000. - 125 с.

## 4.3 Электронные источники информации

Образовательный портал университета (http://portal.tusur.ru), электронный каталог библиотеки ТУСУР http://lib.tusur.ru); электронные информационно-справочные ресурсы вычислительных залов кафедры АОИ