МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
(ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации
(АОИ)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой АОИ,
профессор
___________Ю.П. Ехлаков
«___»___________2011г.

Методические указания для выполнения лабораторных работ, практических и самостоятельных занятий по дисциплине «Исследование операций» для студентов специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Разработчик
доцент кафедры АОИ
___________Турунтаев Л.П.

2011 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данное руководство предназначено для выполнения лабораторных работ и практических занятий по курсу «Исследование операций» с целью закрепления знаний по моделям и алгоритмам решения задач принятия решений в условиях определенности, приобретения навыков моделирования и решения задач принятия решений с помощью пакетов прикладных программ (ППП).

Руководство включает краткое описание задач исследования операций, методы их решения, задания на выполнение лабораторных работ и практических занятий.

2. ПОСТАНОВКА ОДНОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1. Задача использования ресурсов

Рассмотрим задачу линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов.

Пусть предприятие изготавливает n видов продуктов (рис. 2.1), располагая m видами ресурсов в количестве $b_1, b_2, ..., b_m$. Известна матрица $\mathrm{A} = \left| a_{ij} \right|$ расходов i-го ресурса на изготовление одной единицы j-го продукта $(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n})$. Эффективность (прибыль) выпуска единицы j-го продукта равна c_j. Требуется определить план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, максимизирующий прибыль предприятия.

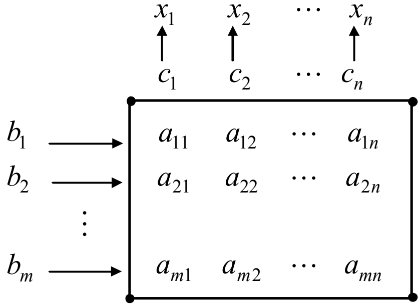

Рис. 2.1. Формализованное описание задачи

Для задачи, сформулированной выше, математическая модель имеет следующий вид: максимизировать

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (2.3)$$

Ограничения (2.2) представляют собой многогранное множество допустимых решений ЗЛП. Если многогранное множество ограничено, то оно называется многогранником. Многогранное множество в ЗЛП выпукло, содержит крайние (угловые) точки $X_1, X_2, \ldots, X_k$, удовлетворяющие следующим условиям

1) любая точка X может быть представлена как выпуклая линейная комбинация угловых точек;

2) каждой угловой точке соответствует базисный допустимый план ЗЛП.

Базисный план задачи (2.1)–(2.2) всегда имеет не более m (если ограничения являются линейно независимыми ($m < n$)) отличных от нуля координат. Они называются базисными. Если таких координат, отличных от нуля, меньше m, то базисный план называется вырожденным. Допустимый план X ЗЛП называется оптимальным, если целевая функция (2.1) достигает своего экстремального значения в точке(ах) X^*. Оптимальный план X^* всегда является базисным планом.

На рис. 2.2 представлена геометрическая интерпретация ЗЛП для случая двух переменных x_1 и x_2. Геометрически целевая функция — семейство параллельных прямых линий уровня цели Z, множество допустимых решений — выпуклый многоугольник.

Для решения ЗЛП Г. Данцигом был предложен симплекс-метод. В основу симплекс-метода положено поэтапное движение к оптимуму X^* от исходной угловой точки области допустимых решений к рядом лежащей угловой точке, позволяющее последовательно улучшать значение целевой функции. Так как угловая точка характеризуется m базисными переменными, то на каждом этапе встают вопросы: какие переменные выбирать за базисные, а какие — за небазисные. Ответы на вопросы дает симплекс-алгоритм, который характеризуется сходимостью (последовательностью улучшения решений) и конечностью в силу конечности множества угловых точек.

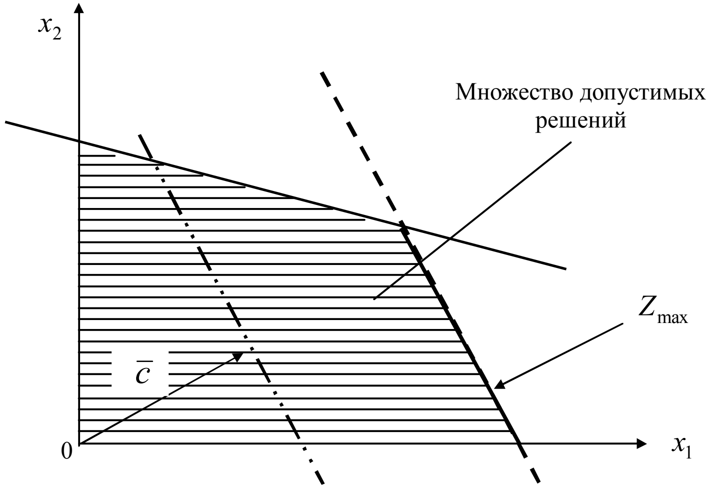

Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация ЗЛП

Для любой задачи ЛП всегда существует обратная (двойственная) ей задача.

Если прямая задача:		то двойственной будет задача:
$\max: Z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\, x_j$ (2.4)		$f = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$ (2.7)
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}$ (2.5)	y_i	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \ge c_j,\ j = \overline{1,n}$ (2.8)
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ (2.6)		$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$ 2.9)

Пара задач (2.4)–(2.6) и (2.7)–(2.9) называется симметричной парой двойственных задач, где y_i — двойственная оценка. В содержательной постановке, если x_j — продукт, b_i — ресурс, c_j — прибыль, то в двойственной задаче y_i — оценка ресурса (его дефицитность).

В линейном программировании существуют следующие теоремы двойственности [2, 3].

1. Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, в других случаях $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j < \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. Если целевая функция одной из ЗЛП не ограничена, то система условий другой противоречива.

2. Чтобы допустимые решения X и Y пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \; j = \overline{1,n}$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \; i = \overline{1,m}$$

Получить решение двойственной задачи можно из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи. Допустим из оптимальной симплекс-таблицы получили оптимальные значения основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач:

Строка Z_{opt}	$0 \cdot x_1$	$5 \cdot x_2$	$0 \cdot x_3$	$12 \cdot x_4$	$0 \cdot x_5$
Решение X^*	Основные			Дополнительные	
	$x_1 = 6$	$x_2 = 0$	$x_3 = 4$	$x_4 = 0$	$x_5 = 8$
Решение Y^*	Дополнительные			Основные	
	$y_3 = 0$	$y_4 = 5$	$y_3 = 0$	$y_1 = 12$	$y_2 = 0$

Тогда:

x_j (основные), $j = \overline{1,n}$ — план выпуска продукции;

x_j (дополнительные), $j = \overline{n+i, n+m}$ — остаток ресурса b_i;

y_i (основные) — оценка дефицитности ресурса i, отражающая изменение целевой функции при изменении ресурса на одну единицу;

y_i (основные) $= \dfrac{\Delta Z}{\Delta b_i}, \ i = \overline{1, m}$;

y_i (дополнительные), $i = \overline{m+1, m+n}$ свидетельствуют об убытке производства продуктов x_j, $i = \overline{1, n}.$

2.2. Задача транспортного типа

Имеется m поставщиков и n потребителей однородной продукции, возможности и потребности которых соответственно равны a_i и b_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта i в пункт j равна C_{ij}. Определить план перевозки продукции от поставщиков к потребителям x_{ij}, минимизирующий общую стоимость всех перевозок.

Математическая постановка задачи:

$$\min: \ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ , \tag{2.10}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \ j = \overline{1, n} \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \mathrm{i} = \overline{1, m} \tag{2.12}$$

Ограничение (2.11) накладывается на спрос j-го потребителя, ограничение (2.12) — на возможности i-го поставщика. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется закрытой, в противном случае — открытой.

2.3.Задача о назначениях

Имеется m потенциальных исполнителей $(j = \overline{1, m})$ соответственно одной из имеющихся m работ $(i = \overline{1, m})$. Известны затраты c_{ij} на выполнение j-м исполнителем i-й работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты. Математическая постановка задачи:

$$\min:\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}, \qquad (2.13)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,m} \qquad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n} \qquad (2.15)$$

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если работа } i \text{ поручается } j\text{-му}\\ 0, & \text{исполнителю;}\end{cases} \qquad (2.16)$$

Ограничение (2.14) указывает, что на каждую i-ую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничение (2.15) указывает, что каждый j-й исполнитель должен быть назначен для выполнения только одной работы. Если число работ не равно числу потребителей, то задача о назначениях называется задачей открытого типа, в противном случае — закрытого.

3. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа представляется к защите в виде отчета, содержащего постановку и решение задач линейного программирования, указанных в задании на работу. В отчет включаются следующие пункты:

1) номер варианта и текст задачи;
2) таблица исходных данных;
3) математическая модель задачи в общем виде с указанием физического смысла переменных, целевой функции и ограничений;
4) математическая задача в числовой форме;
5) методы решения задачи;
6) результаты решения и их содержательная интерпретация, включая физический смысл всех вспомогательных переменных, введенных при решении задачи.

Лабораторная работа № 1

Тема: Анализ линейных моделей задач линейного программирования

Цель работы: освоить пакет прикладных программ (ППП) по линейному программированию (ЛП) и закрепить навыки поиска и анализа решения задач на ПЭВМ.

Задание на лабораторную работу:

1) ознакомиться с ППП ЛП;

2) получить задачу у преподавателя;

3) решить полученную задачу графически, решить ее с помощью ППП ЛП;

4) перейти от исходной задачи ЛП к двойственной, решить ее с помощью ППП ЛП;

5) показать справедливость утверждений теорем линейного программирования:

- о расположении точки оптимума в ограниченном и неограниченном множестве допустимых решений;
- о составляющих вектора оптимальных решений для вырожденного и невырожденного базисного плана, для множества оптимальных решений;
- о необходимом и достаточном условии существования точки оптимума прямой и двойственной задач;

6) найти связь между прямой и обратной задачами ЛП для случая вырожденности и множеством оптимальных решений;

7) дать анализ оптимального решения задачи ЛП.

8) подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Контрольные вопросы.

1. Дайте экономическую и геометрическую интерпретацию задач линейного программирования.
2. В чем заключается сущность методов математического программирования?
3. Какова идея симплекс-метода решения задач линейного программирования?
4. В чем отличие прямого, двойственного и двухэтапного симплекс-алгоритмов?
5. Сформулируйте теоремы двойственности.
6. Дайте экономическую интерпретацию теорем двойственности.
7. Как делается анализ дефицитности ресурсов? Как определить интервалы изменения запасов ресурсов при их дефицитности?
8. Как делается анализ цен на продукты?

Лабораторная работа № 2

Тема: Задачи линейного программирования транспортного типа

Цель работы: закрепить навыки решения задач транспортного типа: классические транспортные задачи, с промежуточными пунктами, о назначениях, о коммивояжере. Для каждой из задач дать математическую постановку, найти решение.

Задание на лабораторную работу:

1. Решить транспортную задачу.

Заводы автомобильной промышленности расположены в Москве, Нижнем Новгороде, Тольятти, Минске. Основные центры распределения продукции сосредоточены в пяти городах. Данные ежеквартальных объемов производства автомобилей указанных заводов, величины квартального спроса в центрах распределения автомобилей, стоимость перевозки одного автомобиля по железной дороге между заводами и центрами распределения получить у преподавателя.

Найдите план перевозок с помощью ППП :

а) исходной задачи двумя способами: симплекс-методом SIMPL и методом потенциалов TRANS;

б) задачи с измененными условиями исходной в сторону увеличения объемов производства программой TRANS;

в) задачи с измененными условиями исходной в сторону увеличения центров спроса;

г) задачи с условиями (в) и с учетом штрафа за недопоставленный автомобиль в первый центр — 3 тыс. руб., в третий — 3,5 тыс. руб.;

д) задачи с условиями (б) и обязательными отправками автомобилей с завода г. Нижнего Новгорода.

2. Придумать задачу о назначениях размерностью 4×4. Решить ее программой SIMPL, TRANS и NAZN;

3. Задача о коммивояжере.

Рассыльному почтового отделения связи необходимо развести корреспонденцию подписчикам таким образом, чтобы минимизировать время на объезд подписчиков:

а) начиная и заканчивая почтовым отделением (считать, что оно располагается в одном здании с подписчиком № 1);

б) начиная с подписчика № 1 без возврата в почтовое отделение;

в) начиная с подписчика № 3 без возврата в почтовое отделение.

Решить задачу алгоритмами Литтла (программа КОММ) и исключения подциклов (программой NAZN).

Варианты задач получить у преподавателя.

4. подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Контрольные вопросы.

1. Дайте содержательную и математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.
2. Можно ли решить транспортную задачу линейного программирования симплекс-методом?
3. Сколько базисных переменных должно быть в допустимом плане решения транспортной задачи?
4. Сформулируйте математическую постановку двойственной ТЗЛП.
5. В чем идея распределительного метода решения транспортной задачи?
6. В чем отличие метода потенциалов от распределительного метода?
7. Укажите способы решения ТЗЛП с промежуточными пунктами.
8. Можно ли решить задачу о назначениях методом, используемым для решения ТЗЛП?

Лабораторная работа № 3

Тема: Моделирование задач линейного программирования общего вида

Цель работы:

1. Построение математической модели реальных ситуаций в виде задачи ЛП.
2. Изучение возможностей пакетов прикладных программ для ЛП
3. Решение индивидуальной задачи путем построения математической модели и использования пакета
4. Анализ решений задачи ЛП.

Порядок выполнения работы:

1. Знакомство с пакетом ПП
2. Изучение, математическое моделирование тестовой задачи.

3. Выполнение индивидуального задания.
   a) составление математической модели ,
   b) ввод и решение задачи,
   c) анализ оптимального решения на чувствительность к изменениям исходных данных.

Составление подробного отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
- выводы по лабораторной работе.

Варианты заданий

Задача 1.

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней так же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Таблица 1

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количеств о ткани
	1	2	3	4	
I II III	1 - 4	- 1 2	2 3 -	1 2 4	180 210 800
Цена изделия (руб.)	9	6	4	7	

Задача 2.

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Таблица 2

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное Фрезерное Шлифовальное	2 1 1	1 - 2	1 2 1	3 1 -	300 70 340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

Задача 3.

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

Таблица 3

Тип судна	Производительность судов (млн.тонномиль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов
	1	2	3	
I II III	8 6 12	14 15 12	11 13 4	300 300 300
Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль)	3000	5400	3300	

Задача 4.

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий A, B и C, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице.

Таблица 4

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	-

Задача 5.

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 5

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	-	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1м ткани (руб.)	5	8	8	-
Выпуск ткани (м):				
Минимальный	1000	2000	2500	-
Максимальный	2000	9000	4000	-

Задача 6.

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Таблица 6

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человек-ч):					
Токарного	550	-	620	-	64270
Фрезерного	40	30	20	20	4800
Сверлильного	86	110	150	52	22360
Расточного	160	92	158	128	26240
Шлифовального	-	158	30	50	7900
Комплектующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человек-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	-
Выпуск (шт.):					
Минимальный	-	40	-	-	-
Максимальный	-	-	120	-	-

Задача 7.

Для обогрева помещений используются четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющемся в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна

80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность i-ого сорта топлива при использовании его на j-ом агрегате задаётся матрицей

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

Задача 8.

Изготовляемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нём указаны в таблице. В ней же указана цена перевозок 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

Таблица 8

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. Кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	-

Задача 9.

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в следующей таблице:

Таблица 9

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	рыба	молоко	Масло	сыр	крупа	карт-офель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

Задача 10.

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. Таблица 10

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (норм-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырьё (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.):				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции максимальна.

Задача 11.

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Таблица 11

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцевание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

Задача 12.

На мебельной фабрике изготовляется пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице.

Таблица 12

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человека-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина (м^3)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	-
Выпуск (шт.): Минимальный Максимальный	 120 480	 90 560	 20 180	 40 160	 30 120	 - -

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготовляться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Используя пакет PER, найти решение задачи, а также провести после оптимизационный анализ полученного решения.

Задача 13.

Из трёх видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества A, 30 ед. – вещества B и 24 ед. – вещества C. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Таблица 13

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A B C	1 2 1	1 - 2	- 3 4	4 5 6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	8

Лабораторная работа № 4

Тема: Моделирование и решение задач целочисленного программирования.

Цель работы:
1.Сформулировать математическую модель
2.Решить задачу с использованием пакета прикладных программ
3.Модифицировать задачу и получить новое решение
4.Дать анализ результатов
.

Варианты заданий

Задача 1.

Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в следующей таблице:

Длина заготовки (см)	Вариант разреза					
	1	2	3	4	5	6
45 35 50	2 - -	1 1 -	1 - 1	- 3 -	- 1 1	- - 2
Величина отходов (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы обеспечить нужное количество заготовок каждого вида при минимальных отходах.
Как изменится модель и решение задачи, если из заготовок выпускаются комплекты: 2 заготовки по 45 см., 3 заготовки по 35 см., 1 заготовка по 50 см.
Максимизируется число комплектов. Число прутьев, которое имеется, взять из решения первоначальной задачи. Как при этом изменятся отходы?

Задача 2.

Для выполнения работ могут быть использованы n механизмов. Производительность i-го механизма (i=1,n) при выполнении j-ой работы (j=1,n) равна c_{ij}. Предполагая, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом, определить закрепление механизмов за работами, обеспечивающее максимальную производительность.

Построить математическую модель задачи.
Как изменится модель и решение, если имеется 2 механизма 1-го типа, 3 механизма 2-го типа, 1 механизм 3-го типа и 2 механизма 4-го типа и при этом на объекте не может находиться более 7 механизмов.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

Министерству необходимо составить план развития каждого из m предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития i-го предприятия различно и равно n_i. Реализация j-го варианта развития i-го предприятия (j=1,n) требует капитальных затрат, равных K_{ij}, и обеспечивает выпуск продукции в объеме b_{ij} единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие i-го предприятия по j-му варианту равен c_{ij}. Учитывая, что необходимо выпустить продукции в количестве B единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна K, составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

K=10 B=40

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{млн. руб.} \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 30 & 12 & 17 \\ 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Как изменится решение, если К и В уменьшатся на 20 %.

Задача 4.

В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолётов. Вместимость самолёта i-го типа равна a_i человек, а количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет b_i человек. Затраты, связанные с использованием самолёта i-го типа на j-ом маршруте, составляет c_{ij} руб.

Определить, сколько самолётов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

a_1=100 a_2=150 a_3=200

b_1=10т b_2=20т b_3=8т b_4=30т

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Подсчитать количество самолетов каждого типа в оптимальном решении. Как изменится решение, если самолетов 2-го типа есть только 100, а 3-го типа меньше 100.

Задача 5.

В обувном производственном объединении производится раскрой m различных партий материалов, причём каждая из партий состоит из b_i единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов всех партий требуется выкроить максимальное количество комплектов деталей обуви, в каждый из которых входит d_j (j=1,n) деталей j-того вида, если при раскрое единицы материала i-ой партии по k-му варианту (k=1,K) получается a_{ikj} деталей j-го вида.

$b_1=100$ $b_2=200$
$d_1=2$ $d_2=1$
$a_{111}=2$ $a_{112}=4$ $a_{121}=3$
$a_{122}=1$
$a_{211}=4$ $a_{212}=7$ $a_{221}=5$
$a_{222}=6$

Задача 6.

Для выполнения четырёх видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырёх типов. Производительность экскаватора i-го типа при выполнении j-ой работы задаётся матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только лишь один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивает максимальную производительность. Как изменится модель и решение, если имеется 2 экскаватора 1-го типа, 3 экскаватора 2-го типа, 1 экскаватор 3-го типа, 2 экскаватора 4-го типа, а общее число экскаваторов не может превышать 6?

Задача 7.

Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объём и цена единицы каждого из которых приведены в следующей таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Объём ($м^3$)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Цена (тыс. Руб.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объёмом, не превышающим 600 $м^3$. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещённого груза была максимальной. Как изменится решение, если количество единиц каждого груза ограничено величинами соответственно: 2;1;4;2;2;3;4;4;4;3;3?

Задача 8.

Из листового проката нужно выкроить заготовки четырёх видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в следующей таблице:

Длина заготовки (см)	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-
50	-	1	-	-	2	-	1	1	3	2	1	-	2
65	-	-	1	-	-	2	1	-	-	1	2	1	-
85	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.
Как изменится модель и решение, если в окончательное изделие (комплект) входит 2 заготовки 1-го и 2-го вида и 3 заготовки 3-го и 4-го вида. Максимизируется число комплектов. Изменятся ли отходы для такого оптимального решения? (Общее число листов взять из результатов 1-й постановки задачи)

Задача 9.

Имеются одинаковые заготовки, которые могут быть раскроены тремя способами. Из имеющихся заготовок нужно получить не менее 10 деталей 1-го типоразмера, не менее 8-ми деталей 2-го типоразмера и не менее 10-ти деталей 3-го типоразмера. Способы раскроя определяются матрицей вида:

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ij} – количество деталей типоразмера i, получаемое из одной заготовки путём её раскроя способом j.

Количество заготовок, раскраиваемых каждым способом, должно быть целым и не превышать 4-х. Отходы от раскроя одной заготовки для каждого из способов составляют 4, 5 и 5 (усл. единиц). Предложить вариант раскроя с минимальными суммарными отходами. Определить величину этих отходов.

Фирма предполагает продавать выкроенные детали по ценам \$4, \$6 и \$2,5 соответственно для 1-го, 2-го и 3-го типоразмера. При этом потери от процедуры раскроя оцениваются величиной \$0,3 на условную единицу отходов. Оптимизируйте процесс раскроя, исходя из соображений получения максимальной прибыли.

Задача 10.

Рассматриваются пять проектов, которые могут быть осуществлены в течение последующих трёх лет. Ожидаемые величины прибыли от реализации каждого из проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долларов) приведены в таблице.

Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль
	Год 1	Год 2	Год 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	10	15
5	8	6	1	30
Максимальный объем капиталовложений	25	25	25	

Предполагается, что каждый утверждённый проект будет реализован за трёхлетний период.
Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли.Как изменится максимум суммарной прибыли, если максимальный объем капиталовложений уменьшать от 25 до 0, или увеличивать от 25 до бесконечности? Построить график.

Задача 11.

Руководство завода предполагает провести комплекс организационно-технических мероприятий по модернизации производства. Перечень возможных мероприятий приведён в таблице. На реализацию всех мероприятий завод может выделить:

- трудовых ресурсов – 1300 чел-дней,
- финансовых ресурсов – 800 млн. руб.
- производственных площадей –700 кв. м

Мероприятие	Трудовые ресурсы (чел. дни)	Финансовые ресурсы (млн. руб.)	Производственные площади (кв. м)	Экономический эффект (млн. руб.)
Закупка станков с ЧПУ	350	400	130	13000
Текущий ремонт	250	90	-	3000
Монтаж транспортного конвейера	100	60	300	8000
Установка рельсового крана	200	300	150	12000
Ввод системы контроля качества	130	-	150	2500
Разработка АСУ	800	500	100	15000

Какие мероприятия следует провести, располагая этими ресурсами, чтобы общий экономический эффект был максимальным? Какова величина этого эффекта? Какой объём выделяемых ресурсов останется неиспользованным при реализации найденного варианта? Изменится ли решение задачи, если завод выделит на модернизацию 1 млрд. руб.?

Изменится ли решение задачи, если завод полностью удовлетворит потребности модернизации в производственных площадях и трудовых ресурсах при прежнем финансировании?

Задача 12.

В регионе работают 4 химических завода. Им предложено принять участие в конкурсе по размещению госзаказа на производство изделий 5-ти наименований в объёмах, приведённых в таблице.

	Наименование изделия				
	А1	А2	А3	А4	А5
Объём заказа (шт.)	350	250	400	150	150

Каждый из заводов представил несколько вариантов годовой производственной программы по выполнению госзаказа и соответствующие финансовые условия. Программа включает выпуск всех изделий.

	Варианты завода 1			Варианты завода 2		Варианты завода 3			Варианты завода 4	
Наименование изделия	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2
А1	100	200	200	50	80	-	-	100	100	50
А2	200	100	150	-	-	200	250	100	40	60
А3	300	250	200	120	100	100	50	500	60	100
А4	100	50	100	100	50	-	-	-	50	-
А5	50	100	80	-	-	100	100	80	150	100
Объём финансирования (млрд. руб.)	12	16	14	7	9	16	15	17	5	8

Каковы минимальные затраты на выполнение госзаказа?

Какой вариант размещения заказа обеспечивает его выполнение при минимальных объёмах финансирования?

Как изменится решение, если учесть, что заводы 1 и 4 не могут одновременно выполнять однотипные варианты размещения заказов?

Задача 13.

Нефтеперерабатывающее предприятие использует в производстве нефть трёх сортов (1, 2 и 3). Резервные запасы нефти каждого сорта должны быть не меньше соответственно 20, 40 и 60 тыс. тонн. Для хранения нефти могут быть использованы 4 резервуара ёмкостью 25, 30, 35 и 40 тыс. тонн. Затраты на хранение 1-ой тонны нефти сорта 2 на 10% выше, чем сорта 1, а сорта 3 – на 20% выше, чем сорта 1. Смешение нефти разных сортов при хранении не допускается.Резервуары заполняются полностью.

Сколько резервуаров следует использовать?

Как распределяются сорта нефти по резервуарам?

Каковы минимальные затраты на хранение нефти?

Целесообразно ли устанавливать дополнительный резервуар объёмом 20 тыс. тонн?

Задача 14.

Для реконструкции машиностроительного предприятия было представлено на выбор 10 проектов, каждый из которых характеризуется четырьмя агрегированными показателями и ежегодной ожидаемой прибылью, представленными в таблице.

Агрегированный показатель проекта	*Варианты проектов*									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Затраты труда (нормо-час)	50	60	30	40	80	70	50	20	40	50
Затраты энергии (тыс. квт)	4	4	2	5	5	2	3	6	6	3
Расходы на материалы (млн. руб.)	3	2	4	5	3	2	4	2	2	3
Финансовые средства (млн. руб.)	7	5	9	6	4	3	7	2	4	5
Ожидаемая прибыль (млн. руб.)	9	8	8.5	8.8	9	8	9	8.7	8.9	8

При выборе проектов необходимо учесть ряд ограничений технологического характера:

- одновременно может быть реализовано не более семи проектов
- 5-ый и 8-ой проекты взаимно исключают друг друга
- 1-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации второго
- 4-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации хотя бы одного из двух проектов: либо 3-его, либо 10-ого.

Выбрать проекты для реконструкции предприятия, обеспечивающие максимальную ожидаемую прибыль. Каков размер этой прибыли?

Задача 15.

Объединение кабельной промышленности состоит из 3-х заводов. Номенклатура выпускаемых изделий включает три позиции: “кабель силовой”, “провод для осветительных установок”, “провод обмоточный”. При планировании развития объединения на три года разработаны три варианта (1-3) для завода 1, 2 варианта (4-5) для завода 2 и один (6) – для завода 3.

(В таблице все данные в условных единицах)

Вариант	Производство кабельных изделий по годам									Затраты за 3 года
	Кабель			Провод силовой			Провод обмоточный			
1 2 3 4 5 6	.9 7 7 19 16 -	7 7.8 23 18 -	0 8.6 8.7 28 22 -	7 25 30 - - -	4 - - - - 864	3 - - - - 950	.8 3 6 13 16 -	18 18 15 18 -	20 20 18 21 -	557 1399 1034 2822 3044 364
Потребность	5	7	5	0	00	50	0	5	0	

Требуется выбрать варианты для включения в план развития объединения, обеспечивающие удовлетворение заданной потребности в кабельных изделиях и реализуемые с минимальными затратами. Каковы эти затраты?

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Занятие 1. Составление математических моделей решения задач исследования операций - 2 часа.

Цель занятия: научиться по содержательной постановке задачи исследования операций делать их математические постановки.

При изучении раздела дисциплины следует обратиться к литературе [1, 2, 6]. По данной теме выполняются контрольные задания.

Контрольные задания по занятию 1.

По приведенным содержательным постановкам задач исследования операций необходимо сделать их математические постановки.

1. Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно 3-х сортов, отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов. Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее B_j единиц питательного компонента j-го типа $(j = 1, n)$. Одна тонна зерна i-го сорта стоит R_i рублей и содержит a_{ij} единиц питательного компонента j-го типа. Складские помещения позволяют хранить не более A тонн зерна. Определить, какое минимальное количество средств должен вложить совхоз в закупку зерна, чтобы обеспечить заданную питательность комбикорма с учетом емкости складских помещений. Сколько зерна каждого сорта необходимо закупить?

2. Цех производит изделия трех типов. Заказ на производство изделий i-го типа составляет B_i штук. Изделия, изготовленные сверх за-каза, могут быть реализованы на свободном рынке. Все изделия обрабатываются последовательно на трех станках, плановый фонд времени k-го станка составляет T_k часов. Технология изготовления каждого из-делия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку i-го изделия j-м способом на k-м станке составляет t_{ijk} часов, себестоимость i-го изделия при j-м способе обработки равна C_{ij} рублей, оптовая цена i-го изделия равна a_i рублей. Рассчитать план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

3. На n железнодорожных станциях S_i имеются пустые товарные вагоны в количестве M_i штук (i–1, m). На станциях D_j не хватает для перевозки грузов N_j вагонов (j–1, n). Расстояние между станциями S_i и D_j равно L_{ij} км. Найти план перегона вагонов, обеспечивающий минимум суммарных затрат на перегон, если стоимость перегона одного вагона пропорциональна

расстоянию между станциями. Общее количество свободных вагонов больше их суммарной потребности.

4. В порту имеется n судов грузоподъемностью Q_i тыс. тонн (i = 1, n), с помощью которых необходимо доставить грузы в n портов назначения. Расстояние до j-го порта назначения равно S_j км, и туда необходимо доставить R_j тыс. тонн груза. Распределить суда по маршрутам так, чтобы минимизировать суммарную величину неиспользуемой про-возной способности (в тонно-километрах). Грузоподъемность любого судна достаточна для перевозки груза в любой порт.

5. В цехе имеется m станков, на которых могут быть изготовлены n типов деталей. Время, необходимое для изготовления детали i-го ти-па на j-м станке, равно T_{ij} час., i-й станок в течение планового периода может работать T_i часов. За это время необходимо изготовить N_j деталей j-го типа. Распределить задания по выработке деталей между станками так, чтобы эксплуатационные расходы были минимальны. Затраты на эксплуатацию i-го станка равны P_i руб./час.

6. Строительной организации необходимо выполнить n видов зем-ляных работ, объем которых составляет V_j куб. м $(j = 1, n)$. Для их осуществления можно использовать m механизмов. Производительность i-го механизма при выполнении j-ой работы составляет P_{ij} куб. м в час., а себестоимость одного часа работы S_{ij} руб. Плановый фонд рабочего времени i-го механизма составляет T_i часов. Составить план организации работ, обеспечивающий его выполнение с минимальными затратами.

7. В состав производственного объединения входит n заводов, производственные мощности каждого из которых позволяют выполнить в установленные сроки лишь один из n заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Затраты на выполнение i-го заказа на j-м заводе составляют P_{ij} тыс. рублей. Распределить заказы между заводами таким образом, чтобы затраты всего объединения на выполнение заказов были минимальны.

8. Деревообрабатывающая фабрика получает m типов лесоматериалов в количестве B_j куб. м в месяц. Из этих материалов изготавливается n видов фанеры. На производство одного кв. метра фанеры j-го типа расходуется Q_{ij} куб. м i-го материала. Заказ на производство j-го вида фанеры составляет P_j кв. м. Составить план производства фанеры на месяц, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль, если i-й лесоматериал обходится фабрике в C_i руб/куб. м, расходы на производство одного кв. м фанеры j-го типа составляют V_j руб., а реализуется эта фанера по цене R_j руб./кв. м.

9. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено A тыс. руб. Его предполагается разместить на площади S кв. м. Участок может быть оснащен машинами пяти типов. Машина i-го типа стоит R_i тыс. руб., занимает площадь Q кв. м и производит P_i единиц продукции в смену. Определить, какое количество машин каждого типа необходимо закупить, чтобы обеспечить максимальную производительность участка.

10. В плановом году в городе будут сооружаться дома m типов. Количество r-комнатных квартир в доме i-го типа равно Q_{ri}. Стоимость строительства одного дома i-го типа составляет R_i тыс. руб. За год необходимо сдать в эксплуатацию не менее Q_r r-комнатных квартир. Рассчитать план строительства жилых домов, обеспечивающий минимальные затраты на строительство.

11. Сухогруз может принять на борт не более A тонн груза, общий объем которого не должен превосходить D куб. м. На причале находятся грузы n наименований. Вес i-го груза составляет B_i тонн, он занимает объем V_i куб. м и стоит R_i тыс. руб. На судно можно погрузить не более одной единицы груза каждого наименования. Найти вариант загрузки судна с максимальной стоимостью груза.

12. Авиатранспортное предприятие располагает самолетами m типов, которые должны быть использованы для перевозки пассажиров по n маршрутам. Самолет i-го типа может перевезти по j-му маршруту за месяц A_{ij} пассажиров, при этом

эксплуатационные расходы составляют C_{ij} тыс. руб. По статистическим данным по j-му маршруту в месяц летает не менее B_j пассажиров. Распределить самолетный парк по мар-шрутам так, чтобы обеспечить перевозку всех желающих при минимальных эксплуатационных расходах.

13. Предприятие, находящееся в городе A, должно отправить потребителям в город B станки m типов. Вес одного станка i-го типа равен G_j тонн. Потребителями заказано N_i станков. За непоставку станка i-го типа в установленный срок предприятие платит штраф R_i рублей. Железная дорога может предоставить предприятию транспортные средства общей грузоподъемностью Q тонн. Определить количество станков каждого типа, которые необходимо отправить потребителям, чтобы потери от неудовлетворительного спроса были минимальны.

14. Судно может принять на борт не более A тонн груза общим объемом не более V куб. м. На причале находятся грузы m наименований. Количество груза i-го наименования — N_i единиц. Вес одной единицы груза i-го типа равен G_i тонн, объем — Q_i куб. м, цена — C_i тыс. рублей. Найти вариант загрузки судна наиболее ценным грузом.

Занятие 2. Решение задач линейного программирования симплекс-методом, анализ моделей на чувствительность - 4 часа.
Цель занятия: освоить алгоритмы и научиться решать задачи линейного программирования прямым, двойственным или двухэтапным симплекс-методом, а также делать анализ результатов решения задачи.

При изучении данной темы следует обратиться к литературе [2, 6, 8]. По теме занятия 2 предусмотрена контрольная работа.

Контрольные задания по занятию 2.

В данной контрольной работе необходимо решить задачу графически; составить задачу, двойственную данной; решить ее симплекс-методом и через оптимальную симплекс-таблицу указать решение исходной задачи.

1. $-x_2 \to \min$
$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 - x_2 \leq 1$
$x_1 - x_2 \leq -1$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. $2x_1 + x_2 \to \max$
$x_1 - 2x_2 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 \leq 8$
$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

3. $2x_1 + x_2 \to \max$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 5$

4. $x_1 - 2x_2 \to \max$
$-2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1 - 2x_2 \leq 12$
$x_1 \geq 10$
$x_2 \geq 2$

5. $8x_1 + 5x_2 \to \max$
$2x_1 + x_2 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 2$
$4x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1 + 4x_2 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. $2x_1 - 3x_2 \to \min$
$-5x_1 + 3x_2 \leq 15$
$x_1 - 2x_2 \geq 4$
$5x_1 - 4x_2 \leq 40$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

7. $3x_1 + x_2 \to \min$
$3x_1 + 5x_2 \geq 15$
$5x_1 + 3x_2 \geq 15$
$x_1 \geq 1$
$x_2 \geq 1$

8. $x_1 + 2x_2 \to \max$
$6x_1 + 2x_2 \geq 6$
$3x_1 - 2x_2 \leq 6$
$3x_1 - x_2 \geq -3$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

9. $2x_1 + 3x_2 \to \min$
$x_1 + 5x_2 \geq 16$
$3x_1 + 2x_2 \geq 12$
$x_1 + x_2 \geq 8$

10. $5x_1 + 4x_2 \to \max$
$2x_1 + 3x_2 \leq 3$
$x_1 + 3x_2 \leq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 5$

$$x_1 \geq 1$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

11. $$x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$-x_1 - 4x_2 \leq -12$$
$$x_1 + x_2 \leq 14$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

12. $$x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$-x_1 - 4x_2 \leq -12$$
$$x_1 + x_2 \leq 14$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq -2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

13. $$2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 14$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

14. $$6x_1 - x_2 \to \max$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 14$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq -2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Занятие 3. Решение транспортных задач линейного программирования транспортного типа - 4 часа.

Цель занятия: изучить алгоритмы решения транспортной задачи ЛП и задачи о назначениях.

В силу специфических особенностей структуры математической модели транспортной ЗЛП разработаны для ее решения менее трудоемкие методы, чем симплекс-метод. Наибольшее применение нашел метод потенциалов, базирующийся на утверждениях теорем двойственности. Опорное решение ТЗЛП можно находить любым из предлагаемых методов [2, 3, 6], при этом не забывайте контролировать себя на количество заполненных клеток в матрице перевозок. Их число, т.е. число базисных переменных, должно быть равно $m + n - 1$. При выполнении задания укажите формулу для подсчета потенциалов и оценок незаполненных клеток, а также условие оптимальности решения.

По теме занятия 3 предусмотрена контрольная работа. Ниже приводятся варианты заданий для выполнения контрольной работы.

Контрольные задания по занятию 3.

1. Найти решение транспортной задачи по критерию стоимости методом потенциалов.

1.	26	30	17	10	16	4
	30	37	26	9	23	6
	13	4	32	3	1	10
	3	1	5	14	24	10
	7	7	7	7	2	

2.	25	1	22	19	1	20
	21	28	11	4	3	20
	26	29	33	26	24	20
	21	10	3	29	27	20
	19	19	19	19	4	

3.	27	20	29	26	25	15
	3	14	5	15	24	15
	19	2	32	4	13	15
	20	27	1	27	19	15
	11	11	11	11	16	

4.	30	26	24	26	29	13
	15	30	29	26	23	17
	4	10	37	30	7	17
	9	16	29	30	3	13
	12	12	12	12	12	

5.	31	22	2	13	7	8
	27	20	4	24	9	12
	3	16	35	5	4	7
	28	11	17	20	29	13
	8	8	8	8	8	

6.	20	17	9	20	30	15
	13	14	24	26	26	15
	22	24	40	27	29	19
	25	12	11	34	23	11
	9	24	9	9	9	

7.	40	24	11	12	25	21
	26	14	29	20	24	19
	27	14	24	10	18	15
	6	14	28	18	2	25
	15	15	15	15	20	

8.	15	15	3	6	10	9
	23	18	13	27	12	11
	30	1	15	24	25	14
	8	26	7	38	9	16
	8	9	13	8	12	

9.	19	17	29	28	8	12
	13	31	27	16	29	8
	20	30	34	7	26	7
	11	19	30	16	2	18
	7	7	7	7	7	

10.	40	2	5	6	15	16
	5	39	9	5	7	15
	16	24	24	6	26	14
	13	28	4	35	8	15
	6	6	13	20	15	

11.	22	11	25	17	21	17
	22	28	14	8	1	14
	9	13	12	28	15	21
	26	21	3	14	27	43
	19	22	23	1	14	

12.	12	24	4	2	3	28
	20	20	15	27	7	13
	15	15	22	25	19	15
	2	6	3	15	5	30
	27	16	25	11	7	

13.

25	6	25	11	12	9
13	24	20	27	30	18
16	7	29	10	21	23
1	29	23	35	18	26
11	22	31	6	6	

14.

32	24	25	23	29	24
1	31	10	7	19	14
2	26	28	30	27	19
22	10	29	36	23	17
22	9	12	13	18	

2. Найти решение задачи о назначениях по критерию стоимости методом вычеркивания нулевых элементов

1.

3	10	5	9	16	8	17
6	8	11	8	18	19	20
7	13	10	3	4	14	18
5	9	6	21	12	17	22
5	4	11	6	13	14	11
17	7	12	13	16	17	9
13	0	8	8	10	12	17

2.

1	4	5	8	9	4	5
5	6	7	8	10	11	12
4	18	4	7	6	7	8
5	4	3	6	10	4	5
9	10	8	9	5	13	6
6	8	11	12	7	8	9
12	4	5	6	2	5	4

3.

5	13	6	10	13	8	9
10	9	7	11	8	12	11
11	5	8	12	4	18	4
12	6	9	8	5	8	5
9	4	4	5	6	6	7
11	8	7	4	7	3	8
6	5	8	12	13	9	14

4.

1	5	7	10	2	3	4
8	2	5	4	7	10	1
8	3	10	17	8	2	3
5	6	7	10	1	3	7
4	8	12	5	4	5	6
10	15	1	2	5	6	7
8	7	12	6	18	5	4

5.

4	5	9	5	6	14	6
8	12	4	13	16	15	16
2	15	8	10	17	7	9
14	8	4	9	5	6	7
3	5	4	12	10	11	13
10	9	11	5	6	12	8
7	13	8	12	8	11	10

6.

5	1	4	2	10	6	7
4	5	10	4	5	8	10
15	12	14	15	4	5	7
4	8	9	10	12	13	14
5	4	7	8	9	10	5
7	8	4	3	5	6	7
9	10	5	8	11	4	3

7.

7	10	8	11	7	15	12
1	2	5	6	10	18	4
8	11	9	2	16	3	6
5	2	5	14	3	10	5
8	7	6	7	13	8	14
6	8	17	10	11	9	5
15	18	5	9	12	6	10

8.

3	5	10	7	8	10	12
4	6	7	4	5	6	7
12	13	11	6	7	8	9
10	4	5	8	9	4	5
8	7	9	5	6	7	11
1	3	12	1	4	5	6
4	10	11	13	15	16	8

9.	**8**	**4**	**5**	**18**	**6**	**1**	**9**	**10.**	**20**	**5**	**12**	**13**	**4**	**3**	**8**
	9	**5**	**7**	**2**	**4**	**8**	**4**		**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	1	**10**	**5**	**6**	**12**	**9**	**6**		**8**	**4**	**5**	**4**	**6**	**7**	**8**
	2	**4**	**7**	**13**	**10**	**8**	**5**		**10**	**5**	**7**	**3**	**4**	**5**	**4**
	12	**3**	**11**	**9**	**12**	**10**	**11**		**3**	**12**	**13**	**4**	**6**	**7**	**8**
	5	**13**	**8**	**2**	**3**	**12**	**13**		**9**	**4**	**8**	**9**	**6**	**5**	**4**
	7	**6**	**4**	**18**	**5**	**6**	**7**		**11**	**4**	**3**	**15**	**4**	**5**	**14**

11.	**18**	**4**	**6**	**7**	**8**	**11**	**5**	**12.**	**8**	**4**	**3**	**1**	**12**	**13**	**5**
	13	**5**	**12**	**13**	**5**	**6**	**8**		**4**	**2**	**5**	**3**	**4**	**5**	**6**
	10	**13**	**14**	**17**	**3**	**4**	**2**		**1**	**4**	**2**	**5**	**6**	**7**	**8**
	5	**6**	**5**	**6**	**4**	**15**	**3**		**9**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	19	**20**	**10**	**7**	**8**	**6**	**7**		**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
	12	**13**	**1**	**13**	**15**	**8**	**7**		**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**4**
	4	**1**	**2**	**2**	**4**	**16**	**9**		**6**	**1**	**2**	**13**	**3**	**4**	**5**

13.	**-**	**36**	**51**	**24**	**11**	**46**	**14.**	**-**	**9**	**37**	**28**	**52**	**53**
	28	**-**	**17**	**46**	**10**	**20**		**24**	**-**	**25**	**48**	**27**	**48**
	7	**41**	**-**	**58**	**2**	**35**		**27**	**45**	**-**	**23**	**47**	**58**
	25	**60**	**45**	**-**	**55**	**59**		**2**	**30**	**16**	**-**	**8**	**60**
	48	**20**	**33**	**26**	**-**	**38**		**53**	**54**	**4**	**1**	**-**	**46**
	50	**27**	**19**	**14**	**52**	**-**		**60**	**12**	**5**	**50**	**35**	**-**

Занятие 4. Решение дискретных задач линейного программирования – 4 часа.

Цель занятия: познакомиться с основными методами решения целочисленных задач линейного программирования, научиться решать задачи методом ветвей и границ (задачу о коммивояжере).

Для решения задачи выбора гамильтонова пути на графе (задача о коммивояжере) используются различные вариации метода ветвей и границ (например, метод Литтла или метод исключения подциклов) [2, 3, 215].

По теме занятия 4 предусмотрена контрольная работа.

Контрольные задания по занятию 4.

Найти решение задачи о коммивояжере по критерию стоимости методом Литтла

1.	**-**	**31**	**15**	**19**	**8**	**55**	**2.**	**-**	**16**	**13**	**35**	**41**	**52**
	19	**-**	**22**	**31**	**7**	**35**		**19**	**-**	**29**	**31**	**26**	**18**
	25	**43**	**-**	**53**	**57**	**16**		**57**	**51**	**-**	**44**	**51**	**7**
	5	**50**	**49**	**-**	**39**	**9**		**5**	**40**	**32**	**-**	**14**	**16**
	24	**24**	**33**	**5**	**-**	**14**		**33**	**41**	**28**	**3**	**-**	**53**
	34	**26**	**6**	**3**	**36**	**-**		**19**	**54**	**24**	**10**	**41**	**-**

3.	**-**	**39**	**45**	**2**	**51**	**33**	**4.**	**-**	**39**	**45**	**2**	**51**	**33**
	3-	**-**	**29**	**31**	**26**	**18**		**30**	**-**	**20**	**33**	**40**	**35**
	57	**51**	**-**	**44**	**51**	**7**		**54**	**16**	**-**	**55**	**22**	**56**
	5	**40**	**32**	**-**	**14**	**16**		**19**	**36**	**25**	**-**	**18**	**43**
	33	**41**	**28**	**3**	**-**	**53**		**29**	**8**	**8**	**12**	**-**	**25**
	19	**54**	**24**	**10**	**41**	**-**		**16**	**47**	**31**	**14**	**8**	**-**

5.	**-**	**56**	**48**	**39**	**3**	**40**	**6.**	**-**	**41**	**60**	**39**	**46**	**10**
	47	**-**	**50**	**4**	**10**	**49**		**31**	**-**	**59**	**16**	**1**	**51**
	48	**50**	**-**	**42**	**19**	**16**		**29**	**51**	**-**	**14**	**42**	**50**
	24	**44**	**47**	**-**	**23**	**33**		**35**	**12**	**52**	**-**	**16**	**26**
	38	**17**	**6**	**51**	**-**	**26**		**16**	**39**	**15**	**60**	**-**	**57**
	29	**59**	**55**	**34**	**18**	**-**		**15**	**30**	**38**	**47**	**36**	**-**

7.	**-**	**58**	**28**	**18**	**2**	**50**	**8.**	**-**	**14**	**17**	**25**	**54**	**37**
	11	**-**	**18**	**47**	**14**	**49**		**57**	**-**	**46**	**19**	**42**	**6**
	49	**3**	**-**	**24**	**35**	**51**		**7**	**24**	**-**	**8**	**9**	**7**
	1	**46**	**50**	**-**	**45**	**15**		**13**	**28**	**30**	**-**	**56**	**18**
	54	**40**	**14**	**12**	**-**	**6**		**26**	**44**	**4**	**52**	**-**	**52**
	8	**58**	**34**	**27**	**47**	**-**		**18**	**5**	**49**	**14**	**12**	**-**

9.	**-**	**44**	**60**	**54**	**29**	**39**	**10.**	**-**	**50**	**33**	**18**	**5**	**44**
	53	**-**	**46**	**19**	**42**	**6**		**51**	**-**	**19**	**24**	**20**	**32**
	36	**7**	**-**	**37**	**44**	**3**		**19**	**23**	**-**	**42**	**14**	**25**
	21	**4**	**49**	**-**	**14**	**26**		**42**	**53**	**2**	**-**	**48**	**5**
	15	**12**	**38**	**46**	**-**	**24**		**27**	**28**	**31**	**33**	**-**	**1**
	19	**6**	**45**	**57**	**11**	**-**		**12**	**37**	**60**	**21**	**21**	**-**

11.	**-**	**21**	**34**	**48**	**58**	**35**	**12.**	**-**	**23**	**38**	**44**	**18**	**32**
	9	**-**	**14**	**30**	**4**	**12**		**51**	**-**	**17**	**35**	**56**	**47**
	6	**7**	**-**	**35**	**11**	**34**		**28**	**37**	**-**	**24**	**16**	**21**
	26	**37**	**17**	**-**	**36**	**52**		**26**	**49**	**60**	**-**	**7**	**46**
	59	**15**	**7**	**32**	**-**	**47**		**56**	**6**	**40**	**34**	**-**	**31**
	3	**17**	**6**	**44**	**59**	**-**		**33**	**20**	**50**	**51**	**30**	**-**
13.	**-**	**36**	**51**	**24**	**11**	**46**	**14.**	**-**	**9**	**37**	**28**	**52**	**53**
	28	**-**	**17**	**46**	**10**	**20**		**24**	**-**	**25**	**48**	**27**	**48**
	7	**41**	**-**	**58**	**2**	**35**		**27**	**45**	**-**	**23**	**47**	**58**
	25	**60**	**45**	**-**	**55**	**59**		**2**	**30**	**16**	**-**	**8**	**60**
	48	**20**	**33**	**26**	**-**	**38**		**53**	**54**	**4**	**1**	**-**	**46**
	50	**27**	**19**	**14**	**52**	**-**		**60**	**12**	**5**	**50**	**35**	**-**

Занятие 5. Решение задач поэтапного планирования – 4 часа.

Цель занятия: ознакомиться с алгоритмами решения задач динамического программирования, сетевого планирования и управления

При изучении данной темы следует обратиться к литературе [ ].

При решении задачи динамического программирования необходимо:

- записать математическую модель задачи
- отметить особенности задачи с привязкой к математической модели, указав этапы, управляемую переменную, состояние системы, цель управления.

По теме занятия 5 предусмотрена контрольная работа.

Контрольные задания по занятию 5.

Варианты заданий с № 1 по № 7

Распределить 5 однородных партий товара между тремя рынками так, чтобы получить максимальный доход от их продажи. Доход от продажи на каждом рынке $G(X)$ зависит от количества реализованных партий товара X и представлен в следующей таблице:

Объем товара X (в партиях)	Доход $G(X)$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	28	30	32	34	33	31	34	33	32
2	41	42	45	44	43	46	43	44	45
3	50	55	48	51	54	60	54	51	48
4	62	64	60	69	70	72	69	70	68
5	76	76	72	79	80	81	76	79	78

Вариант задания $i(i=\overline{1,7})$ определяется выбором столбцов (рынков) из таблицы: вариант *i* включает рынки с доходами $G_j(X), j=\overline{i,i+2}$.

Варианты заданий с № 8 по № 14

Между тремя предприятиями распределить 120 единиц ограниченного ресурса. Значения получаемой предприятиями прибыли в зависимости от выделенной суммы X приведены в таблице. Найти оптимальный план распределения методом прямой прогонки.

Объем ресурса X	Величина прибыли $Z(X)$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	25	24	27	26	23	28	23	27
80	38	40	45	34	37	41	38	42
120	60	55	58	60	59	52	59	59

Вариант задания $i\,(i=\overline{8,14})$ определяется выбором столбцов (предприятий) из таблицы. Вариант *i* включает предприятия с прибылью $Z_j(X),\ j=\overline{i-7,\,i-5}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таха Х. Введение в исследование операций: Кн.1,2. — М.: Мир, 1985. — 479 с., 496 с.
2. Сакович В.А. Исследование операций.— Минск: Высшая школа, 1985.
3. Банди Б. Линейное программирование. — М.: Радио, 1985.
4. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1986. — 320 с.
5. Турунтаев Л.П. Теория принятия решений: Учебное gособие для вузов. - Томск: ТУСУР, 2003. - 222с.
6. Турунтаев Л.П. Системный анализ и исследование операций. Учебное пособие. – Томск: ТМЦДО, 2004.
7. Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений : учебное пособие: ч. 1, Томск : ТМЦДО, 2010 – 210с.

СОДЕРЖАНИЕ