Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

Утверждаю:
Зав. каф АОИ
профессор
___________ Ю.П. Ехлаков
«____» ____________2011 г.

Методические указания
к выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Вычислительная математика»

для студентов направления 080700–
«Бизнес-информатика»

Разработчик:
Программист каф. АОИ
__________ Т.А. Петкун
«____» ___________ 2011 г.

Томск – 2011

Практическая работа №1. Теория погрешностей

1. Округлить сомнительные цифры приближенного числа x, с погрешностью Δx или δx, оставив в его записи верные цифры.

2. Определить абсолютную и относительную погрешность приближенного числа x, если в его записи только верные цифры.

3. Дана функция $z = f(x, y)$; x, y — приближенные значения аргументов; $\Delta x, \Delta y$ — абсолютные погрешности.

Исследовать изменение погрешностей Δx и δx при изменении Δx или Δy, при этом определять количество верных знаков у z, которое будет получаться при этом изменении.
Результаты оформить в виде таблицы.

x	y	Δx	Δy	Δz	δz	z

При записи x, y, z учитывать только верные знаки.

Вариант 1.

1. а) x =34.834; δx =0.1%;
   б) x =0.5748; Δx =0.0034.

2. $x = 11.445$.

3. $z = xe^y$; $x = 1.2745$; $y = -0.2405$; $\Delta x = 0.5*10^{-3}$;
Δy меняется от $0.1*10^{-2}$ до $0.8*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 2.

1. а) x =0.34484; δx =0.4%;
   б) x =2.3485; Δx =0.004.

2. $x = 2.043$.

3. $z = xe^y$; $x = 1.2745$; $y = -0.2405$; $\Delta x = 0.5*10^{-3}$;

Δy меняется от $0.1*10^{-2}$ до $0.8*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 3.

1. а) x=10.8441; δx=0.5%;

   б) x=5.435; Δx=0.003.

2. $x = 0.00037$.

3. $\dfrac{1}{e^x + y}$; $x = 0.3771$; $y = 4.7291$; $\Delta y=0.5*10^{-3}$;

Δx меняется от $0.2*10^{-2}$ до $0.6*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 4.

1. а) x=8.24163; δx=0.2%;

   б) x=0.123456; Δx=0.0004.

2. $x = 3.4453$.

3. $z = \dfrac{\sqrt{x+1}}{y}$; $x = 5.8424$; $y = 32.7486$; $\Delta x=0.17*10^{-2}$;

Δy меняется от $0.1*10^{-2}$ до $0.6*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 5.

1. а) x=24.3163; δx=0.22%;

   б) x=0.8647; Δx=0.0013.

2. $x = 8.73$.

3. $z = \dfrac{\sin^2 x}{\cos y}$; $x = 0.9834$; $y = 8.9146$; $\Delta x=0.4*10^{-3}$;

Δy меняется от $0.5*10^{-2}$ до $1.5*10^{-2}$ с шагом $1.5*10^{-2}$.

Вариант 6.

1. а) x=24.3163; δx=0.22%;

   б) x=0.82345; Δx=0.002.

2. $x = 0.3453$.

3. $z = \dfrac{x+0.2}{y-0.5}$; $x = 2.107$; $y = -1.0753$; Δx =0.6*10^-3^;

Δy меняется от $0.2*10^{-2}$ до $0.5*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 7.

1. а) x =3.3163; δx =0.32%;

   б) x =0.9647; Δx =0.0004.

2. $x = 68.73$.

3. $z = \dfrac{y}{x^3}$; $x = 0.98341$; $y = 2.9146$; Δy =$0.4*10^{-3}$;

Δy меняется от $0.5*10^{-2}$ до $1.5*10^{-2}$ с шагом $1.5*10^{-2}$.

Вариант 8.

1. а) x =24.3163; δx =0.22%;

   б) x =0.82345; Δx =0.002.

2. $x = 0.3453$.

3. $z = \dfrac{x+0.2}{y-0.5}$; $x = 2.107$; $y = -1.0753$; Δx =$0.6*10^{-3}$;

Δy меняется от $0.2*10^{-2}$ до $0.5*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 9.

1. а) x =0.8441; δx =0.5%;

   б) x =5.435; Δx =0.003.

2. $x = 0.0748$.

3. $\dfrac{1}{e^x + y}$; $x = 0.3771$; $y = 4.7291$; Δy =$0.5*10^{-3}$;

Δx меняется от $0.2*10^{-2}$ до $0.6*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 10.

1. а) x =2.24163; δx =0.42%;

   б) x =32.123456; Δx =0.004.

2. $x = 5.6432$.

3. $z = \dfrac{\sqrt{x+1}}{y}$; $x = 5.8424$; $y = 32.7486$; $\Delta x = 0.17*10^{-2}$;

Δy меняется от $0.1*10^{-2}$ до $0.6*10^{-2}$ с шагом $0.5*10^{-3}$.

Вариант 11.

1. а) $x = 0.03163$; $\delta x = 0.32\%$;

   б) $x = 4.88445$; $\Delta x = 0.00053$.

2. $x = 68.735$.

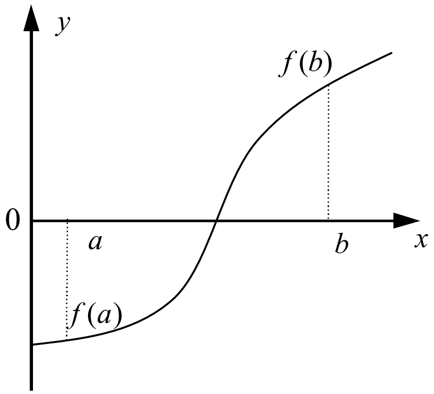
3. $z = \dfrac{\sin^2 x}{\cos y}$; $x = 0.9834$; $y = 8.9146$; $\Delta x = 0.4*10^{-3}$;

Δy меняется от $0.5*10^{-2}$ до $1.5*10^{-2}$ с шагом $1.5*10^{-2}$.

<u>Практическая работа №2.</u> Численные методы решения нелинейных уравнений.

Метод проб

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ находится на отрезке $[a, b]$, функция непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков.



$f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Если отрезок $[a, b]$ содержит несколько целочисленных x, то сузим промежуток следующим образом: вместо отрезка $[a,b]$ рассмотрим отрезок $[N,N+1]$, где N – целое число, такой, что $f(N)$ и $f(N+1)$ имеют разные знаки.

Пусть $a_0 = N, b_0 = N+1$. Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ на 10 равных частей и вычислим значения функции в этих точках $(a_0, a_1, ..., a_{10})$. Может так случиться, что одна из точек деления будет искомым корнем уравнения (т.е. будет отличаться от нуля не больше, чем на заданную точность). Если этого не случилось, то функция $f(x)$ в каких-нибудь из точек a_i и a_{i+1},будет принимать значения разных знаков, перейдем к отрезку $[a_i, a_{i+1}]$. Среднее арифметическое чисел a_i и a_{i+1} будет приближенным значением корня уравнения с погрешностью меньшей, чем ε. Если среди точек деления нет корня уравнения с заданной точностью, то отрезок $[a_1, b_1]$, где $a_1 = a_i$, $b_1 = a_{i+1}$, разделим на 10 равных частей. Процедуру деления будем продолжать до тех пор, пока интервал $a_n - b_n$ не станет меньше, чем заданная точность.

Метод касательных

Этот метод применяется для уточнения корней уравнения $f(x) = 0$`, левая часть которого - гладкая функция, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют постоянные знаки на интервале $[a,b]$ содержащем корень уравнения $f(x) = 0$. Начальное приближение x_1 корня уравнения находим графически. Затем через точку $(x_1; f(x_1))$ проводим касательную к кривой $y = f(x)$. Касательная пересекает ось $0x$ в точке с абсциссой $\widetilde{x} = x_1 - f(x) / f'(x_1)$. Это значение и принимается за следующее приближение корня: $x_2 = \widetilde{x}$ и касательная к кривой $y = f(x)$ проводится в точке с координатами $(x_2; f(x_2))$ (рисунок). Таким образом, расчетная формула метода касательных имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.2}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не станет достаточно малым (меньше заданного ε) значение $|f(x_{n+1})|$ или абсолютная величина разности двух соседних приближений $|x_{n+1} - x_n|$.

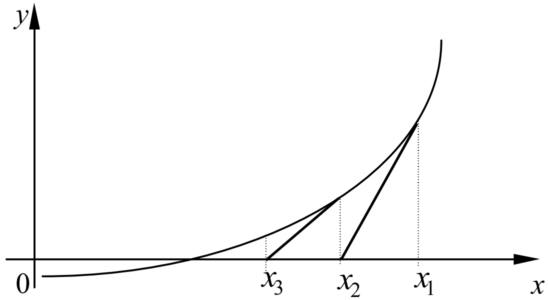


Рис. 2.4. Решение уравнения методом касательных

Для обеспечения сходимости за начальное приближение следует выбирать тот конец интервала $[a\,;b]$, содержащего корень, на котором знак функции совпадает со знаком второй производной.

Для оценки погрешности приближения x_n к точному значению корня x_0 можно пользоваться формулой

$$|x_0 - x_n| \le \frac{f(x_n)}{m},$$

где $m = \min\limits_{[a;\ b]} |f'(x)|$.

Следует отметить, что метод касательных не обеспечивает сходимости в случае кратных корней.

Метод секущих

Один из недостатков метода касательных состоит в том, что пользуясь им, приходится дифференцировать функцию $f(x)$. Если нахождение производной затруднено, то можно воспользоваться видоизменением этого метода - методом секущих. Заменив производную $f'(x)$, используемую в формуле (2.2), разностью последовательных значений функции, отнесенной к разности значений аргумента

$$\Delta(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

получим следующую итерационную формулу

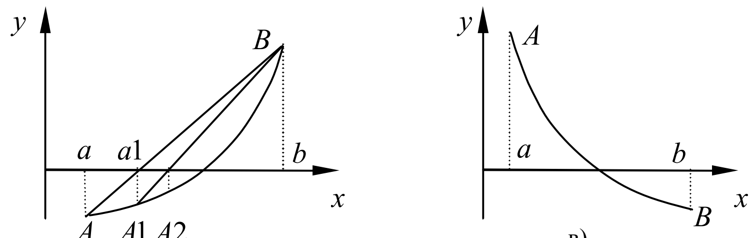
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\Delta(x_n)}. \quad (2.3)$$

Как и в случае метода касательных, расчет по формуле (2.3) заканчивается, когда два последовательных приближения x_n и x_{n+1} станут достаточно близкими $\left(|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon\right)$ или когда $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Так же, как и метод касательных, метод секущих не дает решения в случае кратных корней.

Метод хорд

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ находится на отрезке $[a, b]$, функция непрерывна на $[a, b]$, имеет на промежутке непрерывные первую и вторую производные, причем обе производные сохраняют знак (т.е. функция либо вогнута на промежутке $[a, b]$, либо выгнута).



а) в)

График функции может быть двух типов (а), б) рис. 2.5). Рассмотрим график функции первого типа (рис. 1, а)).

Корень уравнения – точка пересечения графика с осью x. Эта точка нам неизвестна, но мы можем приблизиться к ней. Проведем хорду AB. Точка $a1$ будет приближением к корню уравнения. Если $|a1 - 0| < \varepsilon$ то $a\,1$ и есть корень уравнения с заданной точностью, если нет, то проведем еще одну хорду $A1B$. Точка пересечения хорды с осью x – следующее приближение корня уравнения. Будем проводить хорды до тех пор пока не выполнится условие $|a1-0|<\varepsilon$.

Из уравнения прямых запишем итерационную формулу для получения $n+1$ – го приближения корня уравнения :

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{(f(b)-f(a_n))}*(b-a_n) \qquad (2.5)$$

Если график функции второго типа (рис. 1, б)), то формула для вычисления a_{n+1} имеет следующий вид :

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{(f(a_n)-f(a))}*(a_n-a) \qquad (2)$$

Метод итерации

Для применения этого метода уравнение $f(x)=0$ заменим равносильным ему уравнением

$$x=g(x)$$

Начальное приближение корня уравнения (1) определим графически и подставим его в правую часть уравнения. Тогда левая часть уравнения (1) даст нам следующие приближения корня. Таким образом, итерационная формула этого метода имеет вид:

$$x_{n+1}=g(x_n)$$

Расчет заканчивается, когда $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. Для практического применения метода итерации полезно знать достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Задание к практической работе №2.

1. Отделить графическим способом корни уравнения и выбрать начальное приближение или начальный интервал (в зависимости от метода).
2. Уточнить указанным методом корень уравнения с заданной точностью.
3. Результат решения задачи: корень уравнения, заданная точность, число потребовавшихся для нахождения корня итераций.
4. Нарисовать график зависимости значения корня от номера шага вычислительной процедуры.

5. Нарисовать график (там, где это имеет смысл) зависимости длины отрезка, на котором ищется значение корня, от номера итерации.

Варианты заданий

Уравнение и интервал изоляции корня	**Метод хорд**	**Метод секущих**	**Метод итераций**
$x - \sqrt{9 + x + x^2} - 4 = 0$ [2 ; 3]	1	2	3
$0.1\,x^2 - x \ln x = 0$ [1 ; 2]	4	5	6
$x^4 - 26\,x^3 + 131\,x^2 - 226\,x + 120 = 0$ [19.5 ; 21.2]	7	8	9
$x^4 - 0.486\,x^3 - 5.792\,x^2 + 0.486\,x + 4.792 = 0$ [2 ; 3]	10	11	12
$0.1 \sin x + 3x - 1 = 0$ *[0.8 ; 1]*	13	14	15

<u>Практическая работа №3.</u> Аппроксимация таблично заданных функций

1.1. Цель работы

Изучение и сравнительный анализ основных методов интерполяции

1.2. Теоретические положения

В инженерных расчетах часто требуется восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \le x \le b$, если известны ее значения в некотором конечном числе точек этого отрезка. Одним из способов приближения функции является интерполяция.

Задача интерполяции заключается в следующем. На отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ точка $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ и $n+1$ значение функции $f(x)$ в этих точках, т.е. имеется таблица значений функции $y = f(x)$:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Требуется найти значения этой функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с приведенными в таблице.

1.3. Полиномиальная интерполяция

1.3.1. Формула полинома Лагранжа для случая неравномерной сетки:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq k} (x_k - x_j)} \cdot f(x_k).$$

1.3.2. Формула полинома Лагранжа для случая равномерной сетки:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{q-i} y_i.$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}, \quad q = \dfrac{(x - x_0)}{h}.$

1.3.3. Интерполяционная формула Ньютона для случая неравномерной сетки:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots.(x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n),$$

где $f(x_0; x_1)$, $f(x_0; x_1; x_2)$, $f(x_0; x_1; \ldots x_{x_n})$ — разделенные разности, вычисляемые по формулам:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{1+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f(x_1; x_2; \ldots x_n) - f(x_0; x_1; \ldots; x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

1.4. Сплайн-интерполяция

Теория сплайнов является одним из мощных инструментов вычислительной математики. Сплайнами называются функции, гладко склеенные из различных кусков полиномов. Рассмотрим два случая сплайн- интерполяции, когда между любыми соседними узлами сетки функция интерполируется параболическим или кубическим полиномом. Кубические сплайны наряду с исходной функцией $f(x)$ позволяют также интерполировать ее первые производные.

1.4.1. Параболические сплайны

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$a_i = y_i; \quad i = 0,...,n$$

$$c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i}; \quad i = 0,...,n-1$$

$$b_{i+1} = z_i - b_i, \quad i = 0,...,n-1$$

Если известно $b_n = A_n$, то из (3.17) следует алгоритм

$$b_{n-i} = z_{n-i} - b_{n-i+1}; \quad i = 1,...,n$$

В формулах (3.18), (3.19) $z_i = \dfrac{2(y_{i+1} - y_i)}{h_i}$.

1.4.2. Кубические сплайны.

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n равных частей и в точках x_i $(i = 0,1,2,...,n; \quad x_0 = a; x_n = b)$ некоторая функция принимает значения y_i. Для переменной x, принадлежащей $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,....,n)$, определена функция (кубический многочлен)

$$S_i(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h)}{h^3}+$$

$$+\,y_i\frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h)}{h^3}+$$

$$+\,m_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h^2}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h^2}.$$

Здесь $h=\dfrac{(b-a)}{n}$ — шаг разбиения отрезка. Неизвестные m_i определяются рекуррентными соотношениями

$$m_0 = A;\quad m_n = B;\quad m_i = L_i m_{i+1} + M_i \qquad (i = n-1, n-2,...,0)$$

после предварительного вычисления вспомогательных величин M_i, L_i по рекуррентным формулам

$$L_0 = 0,\quad M_0 = m_0,\quad L_i = \frac{-1}{L_{i-1}+4},\quad M_i = L_i(M_{I-1} - c_i),\quad (i = 1,2,...n-1).$$

где $c_i = \dfrac{3(y_{i+1}-y_{i-1})}{h}$.

Величины A и B должны быть заданы. При построении кубического сплайна, интерполирующего дифференцируемую функцию $y = f(x)$ по системе точек, полагают $A = f'(a),\quad B = f'(b)$.

Задание к практической работе №3.

Даны функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и узлы интерполяции $\overline{x}(x_0, x_1, x_2,...., x_n)$; $\qquad n = 20$.

Требуется:

1. По формулам Лагранжа или Ньютона найти значения функции в двух точках интерполяции;
2. Определить абсолютные погрешности ;
3. Провести сплайн-интерполяцию и оценить ее погрешность;
4. Сделать выводы по работе, написать отчет.

Практическая работа № 4. Методы численного интегрирования

Ставится задача вычислить интеграл вида

$$J = \int_a^b f(x)dx , \qquad (4.1)$$

где a и b — нижний и верхний пределы интегрирования; $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Общий подход к решению задачи будет следующим. Определенный интеграл J представляет собой площадь, ограниченную кривой $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$. Мы будем пытаться вычислить J, разбивая интервал от a до b на множество мелких интервалов, находя приблизительно площадь каждой полоски, получающейся при таком разбиении, и суммируя площади этих полосок.

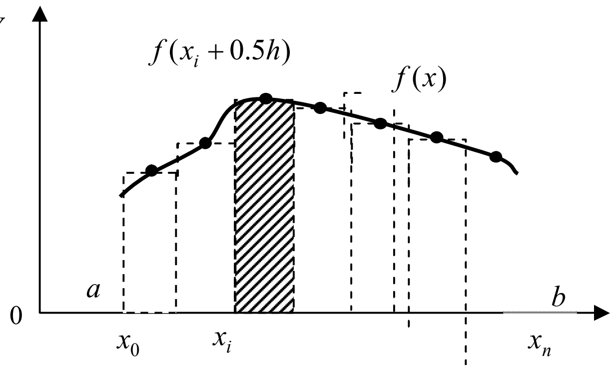
Метод прямоугольников

Это простейший прием численного интегрирования, при котором функция $Y = f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом нулевого порядка. Для повышения точности интегрирования отрезок $[a,b]$ разбивается на n частей и формула прямоугольника применяется к каждому отрезку.

Обобщенная формула прямоугольников:

$$J = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i .$$

Более точным является вид формулы прямоугольников, использующих значения функции в средних точках элементарных отрезков (в полуцелых узлах). Геометрическая интерпретация модифицированного метода прямоугольников представлена на рис:



Геометрическое представление метода прямоугольников

Обобщенная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i+0.5h)+\frac{h^2(b-a)}{24}f''(\xi),$$

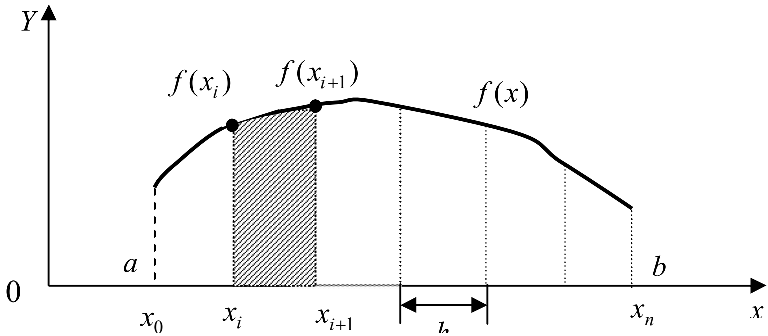
где $f''(\xi)$ - значение второй производной $f(x)$ в точке $x=\xi$, где она максимальна.

Метод трапеций

В данном случае отрезок интегрирования $[a,b]$ разбивается на n равных интервалов длиной $h=\frac{(b-a)}{n}$. В пределах каждого интервала $[x_i,x_{i+1}]$ функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени с узлами x_i, x_{i+1}, что соответствует замене кривой на секущую.

Значение интеграла в пределах $[x_i,x_{i+1}]$, равное площади криволинейной фигуры, заменяется площадью трапеции:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)}{2}.$$



Геометрическое представление метода трапеций

Суммирование значений интеграла по всем n участкам разбиения дает общую площадь, т.е. приближенное значение интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)-$$

$$-\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi).$$

Погрешность усечения $|R| \le \dfrac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi)$ может быть оценена, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную вторую производную $f''(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

Очевидно, что формула трапеций дает точное значение интеграла для линейной подынтегральной функции $f(x)$, так как тогда $f''(x)=0$.

Метод Симпсона (парабол)

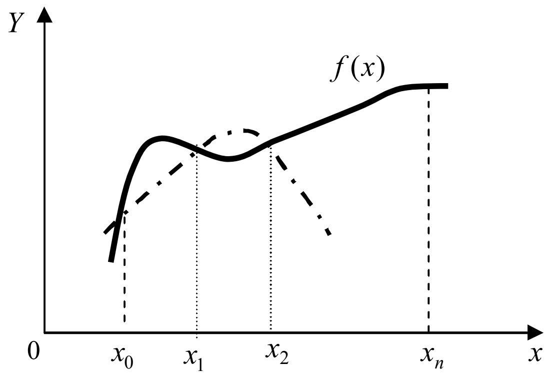
При замене подынтегральной функции интерполяционным многочленом второй степени и четном числе n интервалов разбиения квадратурная формула преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(b)\big)$$

$$-\frac{(b-a)\cdot h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Погрешность усечения формулы Симпсона можно оценить при наличии на отрезке $[a,b]$ непрерывной четвертой производной подынтегральной функции.

Формула парабол является точной для полиномов до третьей степени включительно, так как для них $f^{(4)}(x)=0$. Геометрическая интерпретация метода представлена на рисунке.



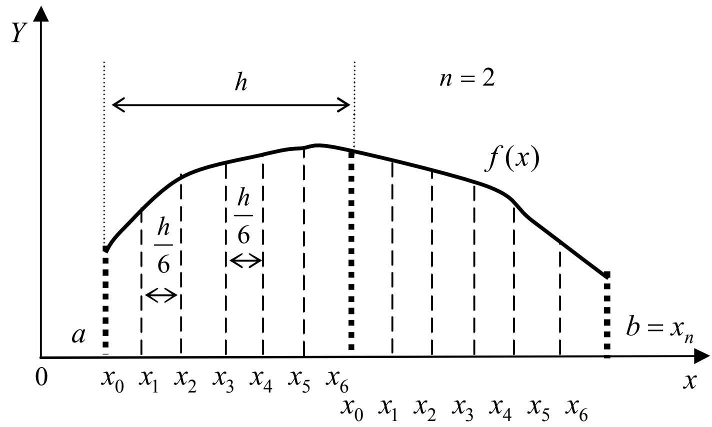
Геометрическая интерпретация метода

Метод Уэддля

Метод базируется на применении к каждому из n отрезков разбиения $[a,b]$ формулы:

$$\int_{x_{a_i}}^{x_{b_i}} f(x)dx \approx \frac{3h}{60}\big(f(x_0)+5f(x_1)+f(x_2)+6f(x_3)+f(x_4)+$$

$$+5f(x_5)+f(x_6)) + \frac{47h^2}{12700} f^{(6)}(\xi).$$



Геометрическая интерпретация метода Уэддля

Оценки точности и сравнение формул интегрирования

Оценка погрешности усечения рассмотренных формул численного интегрирования по выражениям для остаточных членов часто оказывается малоэффективной из-за трудностей оценки производных высокого порядка подынтегральных функций. В силу этого на практике для достижения требуемой точности прибегают к методу последовательного удвоения числа шагов, состоящему в следующем. Задают значение допустимой погрешности ε и начальное число n_0 интервалов разбиения. Вычисляют величину интеграла I по выбранной квадратурной формуле при числе интервалов n_0 и $2\,n_0$ (соответственно I_n и I_{2n}). По правилу Рунге оценивается погрешность приближенного значения интеграла

$$\Delta \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{3}$$ — для формулы прямоугольников и трапеций;

$$\Delta \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{15}$$ — для формулы Симпсона;

$$\Delta \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{63}$$ — для формулы Уэддля.

Если $\Delta \geq \varepsilon$, количество интервалов разбиения увеличивают вдвое, т.е. значения интеграла вычисляются для последовательных значений $n = n_0, 2n_0, 4n_{0,...}$. Вычисления заканчиваются при выполнении условия $\Delta < \varepsilon$.

Этот прием позволяет осуществить автоматический выбор шага при заданной точности интегрирования. Интегрирование по квадратурным формулам сопровождается также ошибками округления. Они носят случайный характер, но с увеличением числа интервалов разбиения n возрастают в среднем пропорционально δn . Вследствие этого общая погрешность, равная сумме погрешностей усечения и округления, с ростом числа интервалов разбиения уменьшается за счет уменьшения ошибки усечения лишь до некоторого значения n . Затем погрешности округления преобладают и общая погрешность увеличивается.

В результате не для всякой функции можно получить результат с заданной погрешностью. Поэтому в программе может быть предусмотрено сообщение пользователю о недостижимости заданной точности. Интеграл при этом вычисляется с максимально возможной точностью, а программа выдает эту реальную точность.

Задание к практической работе №4.

1. Написать программу для вычисления определенного интеграла с заданной точностью. В качестве тестового примера использовать заданный вариант.
2. Оформить в виде функции:
   - вычисление интеграла с заданной точностью;
   - вычисление интеграла с заданным числом разбиений интервала интегрирования;
   - вычисление значения подынтегральной функции.
3. Функции вычисления интеграла разместить в отдельном файле.
4. Имя подынтегральной функции передавать в качестве параметра.
5. Предусмотреть обработку ситуации, когда заданная точность не может быть достигнута..

Варианты заданий

	Метод модифицированных прямоугольников	Метод трапеций	Метод Симпсона	Метод Уэддля
$\int_0^{\pi/6} \sqrt{tgx}dx$	**1**	**2**	**3**	**4**
$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x}dx$	**5**	**6**	**7**	**8**
$\int_0^5 \frac{e^x}{x}dx$	**9**	**10**	**11**	**12**
$\int_0^6 e^x \sin x^2 dx$	**13**	**14**	**15**	**16**

<u>Практическая работа № 5.</u> Численные методы решения СЛАУ.

Метод LU разложений

Элементы матриц L и U могут быть вычислены с помощью формул:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \quad (где\, i \le j),$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \quad (где \text{ i > j}) \right).$$

Если матрица **A** исходной системы разложена в произведение треугольных **L** и **U,** то, значит, вместо $Ax = b$ можно записать эквивалентное уравнение $LUx = b$. Введя вспомогательный вектор $y = (y_1, y_2, ...y_n)^T$, последнее можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Таким образом, решение данной системы с квадратной матрицей коэффициентов свелось к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов.

Все y_i могут быть последовательно найдены при $i = 1,2,...,n$ по формуле

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k .$$

Тогда значения неизвестных x_i находятся в обратном порядке, т.е. при $i = n, n-1,...,2,1$, по формуле

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right), \text{ при этом } x_n = \frac{y_n}{y_n} .$$

Метод простой итерации

Для получения итерационных формул метода простой итерации выразим из первого уравнения x_1, из второго уравнения x_2 и т. д., из n уравнения x_n. Получим:

$$x_1 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - ... - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}$$

$$x_2 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2}} - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} x_1 - ... - \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}}$$

………………………………………

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} x_1 - ... - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} x_{n-1}.$$

В матричном виде: $X = B \cdot X + \beta$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} \\ \frac{a_{2,n+1}}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Используя такую форму записи системы, получим итерационные формулы:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{11}} x_n^{(k)}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{a_{2,n+1}}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \ldots - \frac{a_{2,n}}{a_{22}} x_n^{(k)}$$

…………………………………………………

$$x_n^{(k+1)} = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} - \frac{a_{n,1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)}.$$

Эти формулы используем при $k = 0, 1, \ldots$ и получаем последовательность векторов $X^0, X^1, X^2, \ldots, X^k$.

За начальный вектор X^0 будем брать столбец свободных членов β или $X^0 = 0$.

Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Идея его заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Итерационные формулы метода Зейделя будут иметь следующий вид:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{a_{2,n+1}}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)},$$

…………………………………………………………

$$x_n^{(k+1)} = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Задание к практическому занятию № 5.

Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$:

1. Решить систему методом LU разложений.
2. Исследовать условие сходимости итерационных методов;
3. Решить систему методом простой итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$;
4. Сравнить эти методы по числу итераций;
5.Сделать выводы;
5. Оформить отчет.

Практическая работа № 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши.

Общие сведения и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением 1-го порядка называют соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

где $f(x,y)$ — заданная функция двух переменных, называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Определение 3. Решением дифференциального уравнения на интервале I называется непрерывно дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, превращающая уравнение в тождество на I.

Для дифференциального уравнения первого порядка (1), (2), по определению получаем:

$$F\left(x,\varphi(x),\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)=0 \qquad (3)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x)) \qquad (4)$$

Определение 4. Соотношение (3) называется решением уравнения (4) в неявной форме (или интегралом уравнения (2)), если оно определяет y как функцию от x: $y=\varphi(x)$, которая есть решение уравнения (2).

Определение 5. График решения $y=\varphi(x)$ уравнения (2) называется интегральной кривой данного уравнения.

Определение 6. Проекция графика решения на ось ординат называется фазовой кривой или траекторией дифференциального уравнения.

Определение 7. Задача о нахождении решения $y=\varphi(x)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$, называется задачей Коши.

Определение 8. Дифференциальным уравнением n-го порядка называют соотношение вида

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(k)},\dots,y^{(n)})=0 \qquad (5)$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ неизвестная функция аргумента x, $F(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}, ..., y^{(n)})$ — заданная функция аргументов $x, y, y', y'', ..., y^{(k)}, ..., y^{(n)}$.

Определение 9. Задача о нахождении решения уравнения (5), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (6)$$

где $y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, называется задачей Коши для системы дифференциальных уравнения.

Задания:

Вариант 1. Написать программу решения дифференциального уравнения методами Эйлера и Рунге-Кутта четвертого порядка

Вариант 2. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса второго порядка точности.

Вариант 3. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса третьего порядка точности.

Вариант 4. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса четвертого порядка точности.

Вариант 5. Написать программу решения системы дифференциальных уравнений, используя схему Рунге-Кутта 4-го порядка точности.

Вариант 6. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Милна второго порядка точности.

Вариант 7. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Милна третьего порядка точности.

Вариант 8. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Милна четвертого порядка точности.

Вариант 9. Написать программу решения дифференциального уравнения n -го порядка.

Входные данные:

Функция $f(x, y)$, граничные условия (для вариантов 1,2,3,4,6,7,8);

Функции $f_i(x, y)$, граничные условия (для варианта 5);

Функция $f_i(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, граничные условия (для варианта 9);

Отрезок $[a, b]$, шаг сетки h.

Результаты решения представить в виде графика

1. сделать выводы;
2. оформить отчет.

1. $y' = xy^3 - y, \quad y(0) = 1, \quad [0,1]$

2. $y' = 4{,}3x + 2y + e^{xy}, \quad y(0) = 0, \quad [0, 0.5]$

3. $y'' = 2y' + 2y = 2e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad [0,1]$

4. $y'' - 3y' = e^{5x}, \quad y(0) = 5.5, \quad y'(0) = 0.8, \quad [0,0.2]$

5. $\begin{cases} y' = -xz \\ z' = \dfrac{y}{x} \end{cases}, \qquad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad [0,1]$

6. $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad [0,1]$